



Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Cvičení k předmětu IB005 Formální jazyky a automaty

poslední modifikace February 21, 2024

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podíleli Jiří Barnat, Vojtěch Řehák, Jan Strejček a mnoho dalších studentů a cvičících.

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky L_1, L_2 nad abecedou $\{x, y, z\}$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \cdot L_2, L_2 \cdot L_1$
- $L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+$
- $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

- $\emptyset^*, \emptyset^+, \{\varepsilon\}^*, \{\varepsilon\}^+$
- $\emptyset \cup \{\varepsilon\}, \emptyset \cap \{\varepsilon\}, \emptyset \cap L, \{\varepsilon\} \cap L$
- $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}, \emptyset \cdot L, \{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

- Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.
- Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.
- Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.
- Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.
- Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.
- Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků L_1, L_2 ? Pro pokročilé: platí $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$?
- Rozhodněte, zda platí
 - $aabaabc \in L_2^4$
 - $baaabc \in L_2^6$
 - $ababc \in L_2^3$
- Popište $co - L_2$ (komplement jazyka L_2).

1.4 Buď L libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$
- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$
- najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ a množinových operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), konkatenace (\cdot), iterace (* , $^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

- obsahují alespoň 2 znaky a
- mají sudou délku
- začínají znakem a a končí znakem b
- začínají a končí stejným znakem
- obsahují podslovo aba
- splňují b) a c)
- nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky L_1 , L_2 , L_3 dokažte, zda platí, nebo neplatí:

- $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
- $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
- $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
- $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika G a jakého je typu?

- $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid cAd, \\ cA \rightarrow aB \mid Ca, \\ Bd \rightarrow Sb \mid A, \\ Cad \rightarrow ab \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$
- $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow bS \mid cS \mid aA, \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid a \mid b \mid c \end{array} \right\}$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů ($S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$).

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bC, \\ B \rightarrow aC \mid bS, \\ C \rightarrow aB \mid bA \end{array} \right\}$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

- $L = \{a, b, c, d\}^*$

- b) $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*$; $i = 2, 10, 100$
- c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$
- d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k, k \geq 0\}$
- e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$
- f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \text{první 3 znaky } w = \text{poslední 3 znaky } w\}$
- h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } abb\}$
- i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1, k, l \geq 0\}$
- j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 5}\}$
- k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 3}\}$
- l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 25}\}$

Deterministické konečné automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

- Uveďte jinou formu zápisu automatu.
- Popište jazyk akceptovaný konečným automatem A .
- Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\}$; $\delta(q_3, a) = q_0$

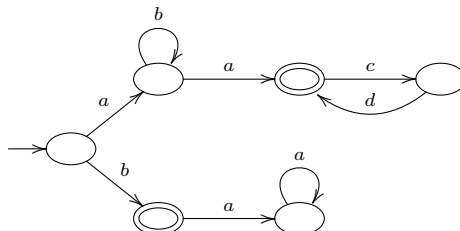
2.2 Konstruuje **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

- $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$
- $\{w \mid w \in \{a\}^*; |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l; k, l \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$
- $(\{a\} \cup \{b\} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\})^*$

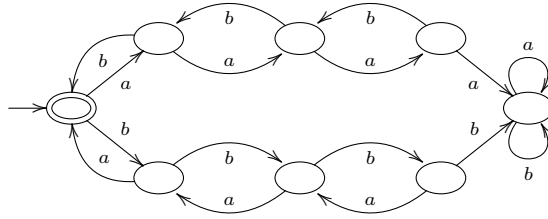
2.3 Konstruuje **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

- $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } babb\}$
- $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

2.4 Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), konkatenace (\cdot), iterace ($^*, ^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)



2.6 Pomocí věty o vkládání dokažte, že jazyk L není regulární:

- a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$
- b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- d) $L = \{a^n \mid n = 2^i; i \geq 0\}$
- e) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$
- f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} \mid n \geq 0\}$
- g) $L = \{c^i a^j b^k \mid j \leq k; i, j, k \in \mathbb{N}\}$

2.7 O každém z následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

- a) $\{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| < |v|\}$
- b) $\{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| < |v|\}$

2.8 Pro pokročilé: Zkonstruuje konečný automat A rozpoznávající jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že $L(A) = L$.

2.9 Konstruuje deterministické FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhillova-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ 1	2	3
2	5	2
3	3	5
← 4	12	2
← 5	7	8
6	4	9
7	12	11
8	4	6
9	10	8
← 10	3	2
← 11	12	6
12	3	10

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
↔ 1	3	2
2	6	4
3	3	5
← 4	4	2
5	10	8
6	6	7
← 7	7	5
← 8	8	2
← 9	11	2
10	10	9
← 11	11	5

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převedte do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ 1	5	2
2	2	8
3	2	7
← 4	9	4
5	2	1
6	2	5
← 7	8	6
8	2	4
9	8	9

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ 1	4	2
2	2	5
3	3	6
4	4	2
← 5	5	3
← 6	6	2

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	3	1
→ 2	9	4
3	–	1
← 4	9	4
5	8	5
6	5	4
← 7	6	9
8	11	–
9	7	9
10	12	3
11	8	1
12	–	10

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	2	1
← 2	3	1
3	4	5
4	4	4
→ 5	1	5

3.3 Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 a) je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	1	3
→ 2	4	1
← 3	4	1
4	3	4

3.4 Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } bba \text{ nebo } aba\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } acbca \text{ nebo } bcabb\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } aaaa\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ má čtvrtý symbol od konce } 1\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } 01011\}$
- $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$
- $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

3.5 K daným nedeterministickým FA zkonstrujte deterministické FA.

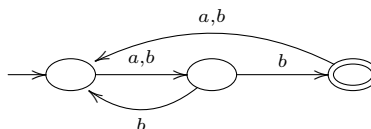
a)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ 1	{2,3}	{3,4}	{1}
← 2	{3}	{4}	{2}
3	{1,2,3}	{1}	{3,4}
4	{1}	{1}	{3,4}

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ 1	{1,2}	{1}	∅
← 2	∅	{3}	{1}
3	∅	∅	{1,4}
4	{5}	∅	∅
5	∅	{6}	∅
6	{7}	∅	∅
← 7	∅	∅	∅

3.6 Popište jazyk akceptovaný automatem:



3.7 Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x, y\}$?

3.8 Dokažte, že neexistuje (totální deterministický) automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 5k, k \in \mathbb{N}_0\}$

3.9 Najděte a formálně popište alespoň dvě relace $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ splňující podmínky Nerodovy věty pro jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}.$$

Určete indexy těchto relací.

3.10 Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhillovy-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

- a) $L = \{a^n \mid n = 2^i, i \geq 0\}$
- b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n, n, m > 0\}$
- c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$
- d) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$

3.11 Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3k, k \geq 0\}$

3.12 Každý jazyk jednoznačně určuje relaci \sim_L předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé w platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

- a) $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$
- b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

3.13 Nechť $\Sigma = \{a, b\}$. Uvažte následující relace na množině Σ^* :

- a) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$
- b) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ nebo u i v končí na stejné písmeno
- c) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ a u i v končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk L takový, že $\sim_L = \sim$. Nakonec nalezněte jazyk L' , který je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* / \sim , ale přitom $\sim_{L'} \neq \sim$.

Regulární gramatiky a výrazy \Leftrightarrow FA, ε -kroky, Kleeneho věta

4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

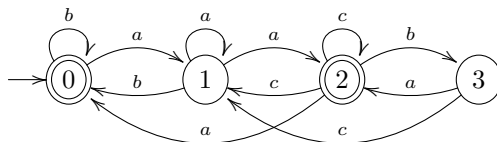
$$P = \{ S \rightarrow aA \mid bC \mid a \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow bB \mid aA \mid b \mid c, \\ B \rightarrow aB \mid bC \mid aC \mid cA \mid c, \\ C \rightarrow a \mid b \mid aA \mid bB \}$$

4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

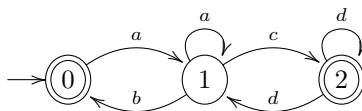
$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aX \mid bY \mid c, \\ X \rightarrow bX \mid bS, \\ Y \rightarrow bS \mid cZ, \\ Z \rightarrow aS \mid b \mid c \}$$

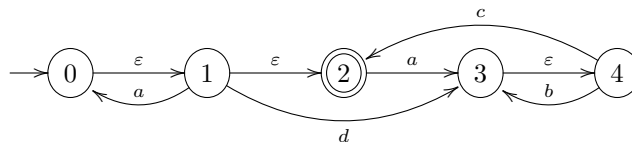
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní regulární gramatiku k automatu:



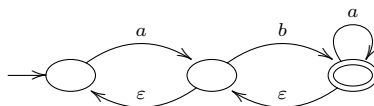
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní regulární gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.



4.6 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.



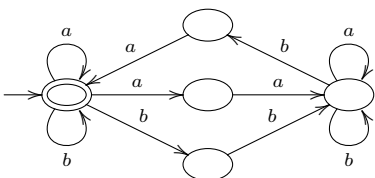
4.7 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.

	a	b	c	ε
$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	\emptyset	\emptyset	$\{2\}$
2	$\{5\}$	$\{3,5\}$	\emptyset	\emptyset
3	\emptyset	$\{6\}$	\emptyset	\emptyset
4	\emptyset	$\{4\}$	\emptyset	$\{1,5\}$
5	$\{5\}$	\emptyset	$\{3\}$	$\{6\}$
$\leftarrow 6$	\emptyset	\emptyset	$\{3,6\}$	$\{2\}$

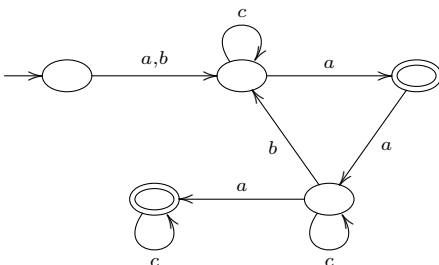
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní FA

- a) $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$
- b) $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$
- c) $((a + b)^* + c)^* + d)^*$

4.9 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

- a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ končí na } ab\}$
- b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$
- c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem } \}$
- d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků \mathcal{R} a nejmenší třídou

- a) M_1 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku (\cup, \cdot, \cap) .
- b) M_2 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu $(\cup, \cap, co-)$.
- c) M_3 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině $(\cup, \cap, ^n)$.

Uzávěrové vlastnosti \mathcal{R}

5.1 Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky L_1, L_2, L_3, \dots regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

5.2 Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků L_1, L_2, L_3, \dots aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

5.3 Nechtě L_1, L_2 jsou neregulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvrátte, zda je či není regulární:

- a) $L_1 \cap L_2$
- b) $L_1 \cup L_2$
- c) $L_1 \setminus L_2$
- d) $L_1 \cdot L_2$
- e) L_1^*
- f) $co-L_1$

5.4 Nechtě L_1 je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk L_2 je nutně neregulární?

5.5 Platí následující implikace?

- a) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
- b) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
- c) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je neregulární
- d) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je regulární
- e) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je neregulární
- f) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je regulární

5.6 Def: operace \odot rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky L_1 a L_2 , aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

5.7 Nechtě $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^\#$ jsou regulární:

- a) $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \in \Sigma^* \text{ takové, že } u \cdot v \in L\}$
- b) $L^\# = \{w \mid \text{existují } x, y, z \in \Sigma^* \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

5.8 Dokažte, že pro libovolný jazyk L a libovolný konečný jazyk K platí:

- a) L je regulární $\iff L \setminus K$ je regulární
- b) L je regulární $\iff L \cup K$ je regulární

5.9 Def: Homomorfismus $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Def: Nechť L je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$

Def: Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že \mathcal{R} je uzavřena na h, h^{-1} .

5.10 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h ; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

5.11 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h ; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaaabaa)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

5.12 Dokažte nebo vyvráťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

- a) $G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
 $P = \{ S \rightarrow aB \mid bA \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bAA, \\ B \rightarrow bS \mid aBB \}$
- b) $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
 $P = \{ S \rightarrow aAS \mid a, \\ A \rightarrow ba \mid Sba \}$

6.2 Pro následující gramatiku

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde} \\ P = \{ S \rightarrow AaB \mid BaA, \\ A \rightarrow AB \mid a, \\ B \rightarrow BB \mid b \}$$

- a) najděte derivační strom s výsledkem *bbbbaa*
b) je tento strom určený jednoznačně?
c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo *bbbbaa*
d) je gramatika jednoznačná?
e) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristické vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$$G = (\{S\}, \{a\}, P, S), \text{ kde} \\ P = \{ S \rightarrow SSS \mid a \}$$

- a) je gramatika jednoznačná?
b) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná? Lze sestavit jednoznačnou gramatiku pro tento jazyk?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde} \\ P = \{ S \rightarrow aA \mid bB, \\ A \rightarrow aAB \mid aa \mid AC \mid AE, \\ B \rightarrow bBA \mid bb \mid CB \mid BF, \\ C \rightarrow DE, \\ D \rightarrow cc \mid DD, \\ E \rightarrow FF \mid FE, \\ F \rightarrow EcE \}$$

6.9 Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

6.10 Je jazyk generovaný gramatikou G bezkontextový?

$G = (\{S, T\}, \{x, y\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow xT, \\ T \rightarrow Sx, \\ xTx \rightarrow y \end{array} \right\}$$

6.11 Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f) $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a, b, c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.1 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC,$$

$$A \rightarrow AbA \mid BC,$$

$$B \rightarrow bB \mid b \mid cBbAa \mid \varepsilon,$$

$$C \rightarrow cD \mid c \mid Ab \mid \varepsilon,$$

$$D \rightarrow SSS \mid b \}$$

7.2 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC,$$

$$A \rightarrow Ab \mid BC,$$

$$B \rightarrow bB \mid b \mid Ab \mid \varepsilon,$$

$$C \rightarrow cD \mid c \mid Ac \mid \varepsilon,$$

$$D \rightarrow SSD \mid cSAc \}$$

7.3 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow 1X \mid Y1 \mid XZ,$$

$$X \rightarrow 0YZ1 \mid S1X \mid Y,$$

$$Y \rightarrow 1 \mid X1 \mid \varepsilon,$$

$$Z \rightarrow SZ \mid 0 \mid \varepsilon \}$$

7.4 Význam konstrukce množin N_ε na příkladu

$$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \{ A \rightarrow BC \mid a \mid \varepsilon,$$

$$B \rightarrow aB \mid ACC \mid b,$$

$$C \rightarrow cC \mid AA \mid c \}$$

7.5 Odstraňte jednoduchá pravidla. Diskuse o významu N_A .

$$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow X \mid Y,$$

$$A \rightarrow bS \mid D,$$

$$D \rightarrow ba,$$

$$B \rightarrow Sa \mid a,$$

$$X \rightarrow aAS \mid C,$$

$$C \rightarrow aD \mid S,$$

$$Y \rightarrow SBb \}$$

7.6 Převedte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow SaSbS \mid aAa \mid bBb,$$

$$A \rightarrow aA \mid aaa \mid B \mid \varepsilon,$$

$$B \rightarrow Bb \mid bb \mid b \}$$

7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0H1 \mid 1L0 \mid \varepsilon, \\ H \rightarrow HH \mid 0H1 \mid LH \mid \varepsilon, \\ L \rightarrow LL \mid 1L0 \mid HL \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

$$\text{a) } L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$\text{b) } L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$$

7.9 Nechť G je gramatika v CNF. Nechť $w \in L(G)$, $|w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova w v G ?

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid Sbb, \\ A \rightarrow AAb \mid ab \mid Sbb, \\ B \rightarrow Bbb \mid BBB \mid bAb \end{array} \right\}$$

7.11 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A1 \mid 0 \mid 1B, \\ A \rightarrow BS0 \mid 10 \mid SB0, \\ B \rightarrow 0B \mid B1B \mid S0 \end{array} \right\}$$

7.12 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Xc \mid Yd \mid Yb, \\ X \rightarrow Xb \mid a, \\ Y \rightarrow SaS \mid Xa \end{array} \right\}$$

7.13 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow TTt \mid Tt \mid TS \mid s, \\ T \rightarrow SsT \mid TsT \mid t \end{array} \right\}$$

7.14 Transformujte do Greibachové NF. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \rightarrow CD \mid AB, \\ C \rightarrow Aa \mid b, \\ D \rightarrow bA \mid DD \end{array} \right\}$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

$$\text{a) } L = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$\text{b) } L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

$$\text{c) } L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\}$$

Zásobníkové automaty, C-Y-K

8.1 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, \varepsilon, A) &= \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, d, A) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} \\ \delta(q_3, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} & & \end{aligned}$$

- Načrtněte stavový diagram PDA A .
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu a^3b^2c (stačí na obrázku).
- Popište jazyk $L(A)$.

8.2 Je daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\ \delta(q_1, a, Y) &= \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) &= \{(q_4, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

- Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.
- Popište jazyk akceptovaný automatem s původním F , tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

8.3 Konstruuje PDA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

- $L = \{a^i b^j \mid i \neq j, i, j \geq 0\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; w = w^R\}$
- $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{a^{3n+2} b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$
- $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$
- $L = \{a^{n+m} b^{m+p} c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$
- $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^k b^k c^m \mid k, m \geq 1\}$
- $L = \{a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_r} \mid r > 1, k_i \geq 1 (i = 1, \dots, r; \text{existuje } p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} \\ \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

8.5 Daný PDA $A = (\{q\}, \{(\cdot)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned}\delta(q, (\cdot, Z) &= \{(q, L)\} \\ \delta(q, (\cdot, L) &= \{(q, LL)\} \\ \delta(q, (\cdot, L) &= \{(q, \varepsilon)\}\end{aligned}$$

8.6 Pro danou G navrhnete (rozšířený) PDA, který provádí syntaktickou analýzu:

- a) shora dolů,
- b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *ababbb*.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abAS \mid bb, \\ A \rightarrow AbB \mid aB \mid a, \\ B \rightarrow bSS \mid aB \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

8.7 Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převedte na standardní zásobníkový automat.

8.8 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, A) &= \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) &= \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) &= \{(q_0, A)\}\end{aligned}$$

8.9 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, X\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AA)\} \quad \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AAA)\} \quad \delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

8.10 Pomocí algoritmu C-Y-K rozhodněte, zda následující gramatika generuje slovo *kolaloka*.

$G = (\{S, A, B, D, C\}, \{k, o, a, l\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \mid DB, \\ A \rightarrow k \mid AB, \\ B \rightarrow o \mid BD \mid SC, \\ C \rightarrow a \mid AC \mid SA, \\ D \rightarrow l \mid DC \mid AC \end{array} \right\}$$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.1 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá

- a) L_1, L_2 bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový
- b) L_1 bezkontextový $\wedge L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový
- c) L_1 regulární $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový
- d) L_1 konečný $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

9.2 Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$R = L((a + b)^*a + \varepsilon)$$

Navrhněte PDA pro jazyk $L \cap R$. Jazyky L, R jsou akceptovány zásobníkovým a konečným automatem s těmito přechodovými funkcemi a koncovými stavy.

$$\begin{array}{lll} \delta_L(q_0, x, Z) = \{(q_0, xZ)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, a) = p_0 \\ \delta_L(q_0, x, y) = \{(q_0, xy)\} & \forall x, y \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, b) = p_1 \\ \delta_L(q_0, \varepsilon, x) = \{(q_1, x)\} & \forall x \in \{a, b, Z\} & \delta_R(p_1, b) = p_1 \\ \delta_L(q_1, x, x) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_1, a) = p_0 \\ \delta_L(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\} & & \\ F_L = \{q_2\} & & F_R = \{p_0\} \end{array}$$

9.3 Je dána bezkontextová gramatika

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \}$$

- a) Má tato gramatika vlastnost sebevlození?
- b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevlození?
- c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?
- d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevlození a regularitou?

9.4 Je dán bezkontextový jazyk $L, L \subseteq \{a, b\}^*$

Zkonstruujeme nový jazyk L_1 takto:

$$\text{a) } L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; xy \in L\}$$

$$\text{b) } L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; yx \in L\}$$

Dokažte, že L_1 je taky bezkontextový.

Konstrukce Turingových strojů

10.1 Navrhněte deterministický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

10.2 Navrhněte deterministický jednopáskový TM se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru 0^*1^* jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

10.3 Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásy) TM pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

10.4 Navrhněte TM (determ. nebo nedeterm.) pro jazyk:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$

b) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

c) $L = \{a^p \mid p \text{ není prvočíslo}\}$

d) $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis čísla } n\}$

Vztah TM a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.1 Objasněte rozdíl mezi pojmy TM akceptuje a TM rozhoduje.

11.2 Je daný DTM T (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhnete k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{aligned}\delta(q, \triangleright) &= (q, \triangleright, R) & \delta(q, a) &= (p, A, R) \\ \delta(p, b) &= (q, a, L) & \delta(q, \sqcup) &= (p, A, R) \\ \delta(p, \sqcup) &= (q, a, L) & \delta(q, b) &= (q_{accept}, A, R)\end{aligned}$$

Kde \triangleright je levá koncová značka, \sqcup označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, q je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\triangleright, \sqcup, A, a, b\}$.

11.3 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

- R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární
- L je rekurzivní \Rightarrow co- L je rekurzivní
- L je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní
- L je kontextový \Rightarrow co- L je rekurzivní
- L není rekurzivní \Rightarrow co- L není rekurzivní
- L není rekurzivní a R je rekurzivní $\Rightarrow L \setminus R$ není rekurzivní
- L není rekurzivní, R je rekurzivní a $R \subseteq L \Rightarrow L \setminus R$ není rekurzivní

11.4 Navrhnete gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n \text{ je mocnina } 2\}$

11.5 Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TM } A \text{ zastaví svůj výpočet nad slovem } v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

11.6 Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

Redukce

12.1 Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- a) $A \leq_m B \Rightarrow co-A \leq_m co-B$
- b) $A \leq_m B$ a B je regulární $\Rightarrow A$ je regulární
- c) A je rekursivně spočetná a $co-A \leq_m A \Rightarrow A$ je rekursivní
- d) A je rekursivně spočetná a $A \leq_m co-A \Rightarrow A$ je rekursivní
- e) $A \leq_m B$ a A je rekursivní $\Rightarrow B$ je rekursivní
- f) A je rekursivně spočetná $\Rightarrow A \leq_m HALT$

12.2 Je dán jazyk $A = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TM } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný}\}$.
Dokažte, že A není rekursivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na A .)
Je jazyk A rekursivně spočetný?
Je komplement jazyka A rekursivně spočetný?

12.3 Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[\frac{aa}{a} \right], \left[\frac{ab}{abab} \right], \left[\frac{b}{a} \right], \left[\frac{aba}{b} \right] \right\}$$

12.4 Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu $\{0, 1\}$.

12.5 Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.

Plán cvičení

1. cvičení: Operace nad jazyky

- Pro zopakování: abeceda, slovo, jazyk, operace na slovech a na jazycích.
- Příklady 1.1 a 1.2.
- Příklad 1.3 d) e) f) h).
- Příklad 1.4.
- V sudých skupinách se cvičí příklad 1.5, v lichých příklad 1.6.
- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8 b).
- Příklad 1.8 c).

2. cvičení: Gramatiky, deterministické konečné automaty

- Pro zopakování: gramatiky, typy gramatik (Chomského hierarchie), konečné automaty.
- Příklad 1.9 a) nebo b).
- Příklad 1.11 a) d).
- Příklad 2.1.
- Příklad 2.2 a) b) c) d). Pozor, automaty musí být deterministické.
- Příklad 2.3 a) b).
- Případně 2.5 a následně zbylé části příkladu 1.11 nebo příklad 2.7.

3. cvičení: Pumping lemma a Myhillova-Nerodova věta

- První část: Pumping lemma (zopakujte si ho před cvičením).
- Příklad 2.6. Odrážky a)–c), e), g), s důrazem na zápis důkazu.
- Druhá část: Myhillova-Nerodova věta.
- Pro zopakování: pravá kongruence, prefixová ekvivalence, jejich souvislost s konečnými a minimálními automaty, znění M.-N. věty.
 1. Z DFA lze odvodit pravou kongruenci s konečným indexem takovou, že L je sjednocení nějakých tříd ekvivalence.
 2. Z takové pravé kongruence lze odvodit DFA.
 3. Pro každý jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ (i neregulární) je \sim_L vždy pravá kongruence a L je sjednocením nějakých tříd rozkladu Σ^* / \sim_L . Má-li \sim_L konečný index, lze sestavit DFA pro L a L je tudíž regulární.

4. \sim_L je nejhrubší ze všech pravých kongruencí \sim takových, že L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^*/\sim .

- Příklad 3.9.
- Příklad 3.12.

4. cvičení: Myhillova-Nerodova věta

- Pro zopakování: pravá kongruence, prefixová ekvivalence, Myhillova-Nerodova věta.
- Příklad 3.10.
- Příklad 3.8, 1 odrážka. Totéž pro jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^* \cdot \{d\}^*$.
- Příklad 3.13.

5. cvičení: Minimalizace a kanonizace konečných automatů, nedeterministické automaty, determinizace, odstranění ε -kroků

- Pro zopakování: Algoritmy pro minimalizaci a kanonizaci deterministických automatů. Nedeterministické konečné automaty, algoritmy pro determinizaci a odstranění ε -kroků.
- Příklad 3.2 b). Případně ještě 3.1 a) a 3.3.
- Příklad 3.4 a) c) d).
- Příklad 3.5 a) nebo b).
- Příklad 4.5, případně ještě 4.7.
- Pokud zbývá čas, ostatní části příkladu 3.4.

6. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Pro zopakování: uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků.
- Příklad 5.8.
- Příklad 5.1.
- Důkaz uzavřenosti neregulárních jazyků na komplement.
- Příklad 5.2.
- Příklad 5.3. Pokud to jde, uveďte dvojici neregulárních jazyků, kdy výsledek operace je regulární a dvojici, kdy výsledek není regulární.
- Příklad 5.4.
- Příklad 5.5 a) b) c) d).
- Rozhodněte, zda platí následující implikace. Odpověď zdůvodněte.
 - a) $L \cap L^R$ je regulární $\Rightarrow L$ je regulární
 - b) $L \cap L^R$ není regulární $\Rightarrow L$ není regulární
- Příklad 5.6.
- Příklad 4.12 a). Proč b) nevyjde stejně?

7. cvičení: Regulární výrazy, převody formalismů pro popis regulárních jazyků

- Pro zopakování: regulární výrazy, převod regulárního výrazu na automat a naopak.
- Příklad 4.8 (2 odrážky).
- Příklad 4.9.
- Příklad 4.10.
- Příklad 4.11.
- Příklad 4.2.
- Příklad 4.4.

8. cvičení: Bezkontextové gramatiky, derivační stromy, jednoznačnost, redukované gramatiky

- Pro zopakování: bezkontextová gramatika, derivační strom, jednoznačnost gramatiky, redukovaná gramatika, nedosažitelné a nenormované symboly.
- Příklad 6.11 a).
- Příklad 6.1.
- Příklad 6.2.
- Příklad 6.3.
- Příklad 6.5.
- Příklad 6.6.
- Příklad 6.7.
- Příklad 6.8.
- Případně další odrážky z příkladu 6.11.

9. cvičení: Transformace bezkontextových gramatik

- Pro zopakování: odstranění ε -pravidel a jednoduchých pravidel. Chomského a Greibachové normální forma a transformace gramatik do těchto normálních forem. Levá rekurze a její odstranění.
- Příklad 7.2.
- Příklad 7.5.
- Příklad 7.6.
- Příklad 7.8 a), případně b).
- Příklad 7.13, jen odstranění levé rekurze.
- Příklad 7.12, včetně transformace do GNF.
- Příklad 7.14.

10. cvičení: Pumping lemma pro bezkontextové jazyky, zásobníkové automaty, nedeterministická syntaktická analýza

- Pro zopakování: Pumping lemma pro CFL, zásobníkový automat, nedeterministická syntaktická analýza shora i zdola.
- Příklad 7.15.
- Příklad 8.1 a) c).
- Příklad 8.3, aspoň dvě odrážky včetně c). Na konci případně další odrážky.
- Příklad 8.6.

11. cvičení: Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků, konstrukce Turingových strojů

- Pro zopakování: uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků, Turingův stroj.
- Příklad 9.1.
- Příklad 9.2.
- Příklad 9.3.
- Příklad 9.4.
- Příklad 10.1.
- Příklad 10.2.
- Příklad 10.3.
- Příklad 10.4.

12. cvičení: Vztah Turingových strojů a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

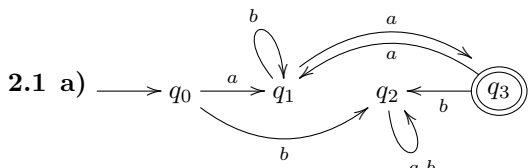
- Pro zopakování: Turingův stroj, rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky, kontextové gramatiky a gramatiky typu 0.
- Příklad 11.1.
- Příklad 11.2.
- Příklad 11.3.
- Příklad 11.4.
- Příklad 11.5.
- Příklad 11.6.

Řešení některých příkladů

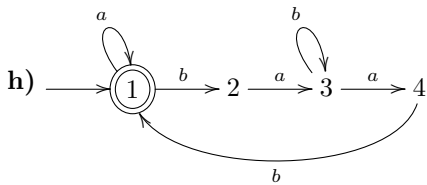
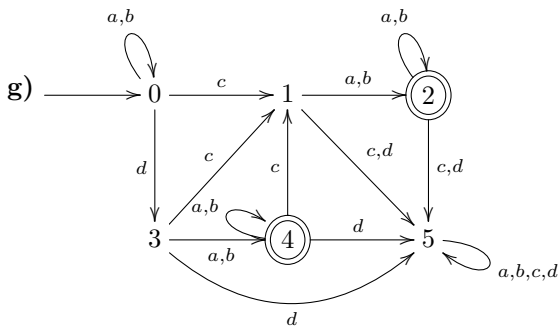
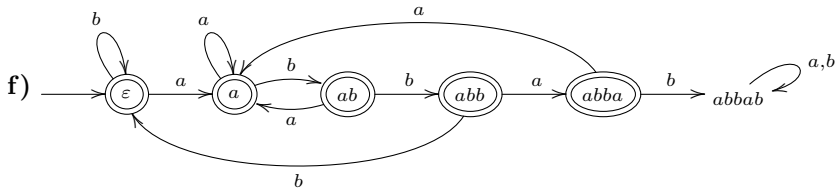
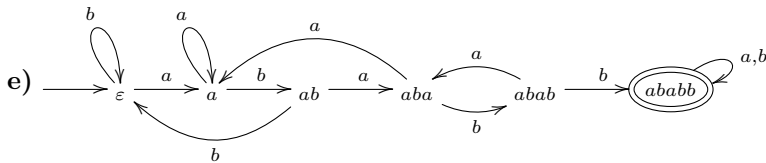
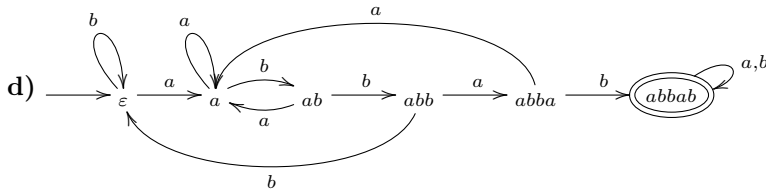
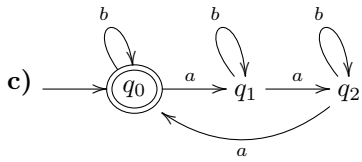
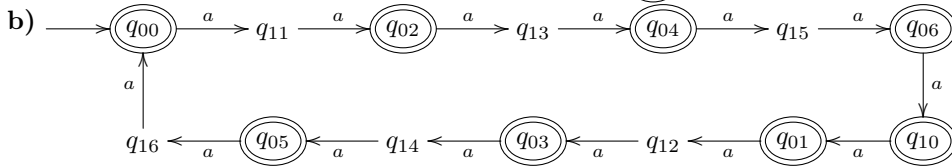
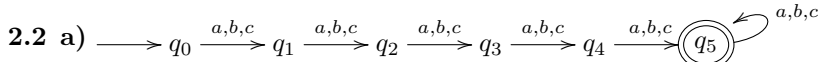
Formální jazyky, regulární gramatiky

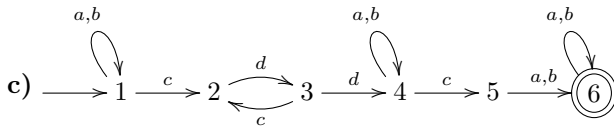
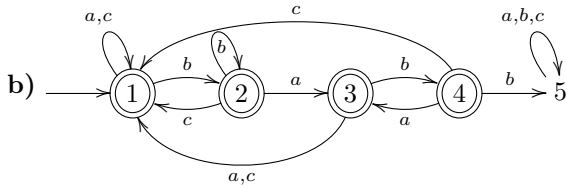
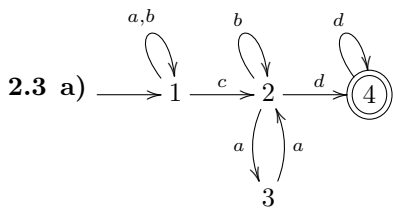
- 1.1 a)** $\{xy, y, yx, z\}$ **b)** $\{y\}$ **c)** $\{xyy, xyz, yy, yz, yxy, yxz\}, \{yxy, yy, yyx, zxy, zy, zyx\}$
d) $\{\varepsilon\}, \{y, z\}, \{yy, yz, zy, zz\}, \{yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz\},$
 $\{\varepsilon, y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \dots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z včetně ε ,
 $\{y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \dots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z kromě ε
e) $\{x, y, z\}^* \setminus \{y, z\}$ tj. libovolné slovo složené z písmenek x, y a z včetně ε , kromě slov y a z
- 1.2 a)** $\{\varepsilon\}, \emptyset, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}$ **b)** $\{\varepsilon\}, \emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\}$ pokud $\varepsilon \in L$ jinak \emptyset **c)** $\emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\}, L$
- 1.3 a)** $\{a, aa, ba, abc, \varepsilon\}$ **b)** $\{a, ba\}$ **c)** $\{aba, aabc, aa, a, aaba, aaabc, aaa, baba, baabc, baa, ba\}$ **d)** ne, protipříklad $aabc \in L_1 \cdot L_2 \setminus L_2 \cdot L_1$ **e)** jedno slovo z množiny $\{a, aa, ba, aba, aaa, baba, baa\}$ **f)** ano, protože $\varepsilon \in L_2$; ne, protipříklad $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$; pro pokročilý: implikace " \implies " platí, implikace " \impliedby " platí pouze v upravené podobě $\varepsilon \in L_2 \iff (L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset)$ **g)** ano, ano, ne **h)** všechna slova nad danou abecedou, kromě slov z jazyka L_2 , formálně: $\{a, b, c, d\}^* \setminus L_2$
- 1.4 a)** Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa, bb\}, i = 2, L^i = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}, \{w^i \mid w \in L\} = \{aaaa, bbbb\}$
b) Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa\}, L^2 = \{aaaa\}$, ale $|aaaa| \neq 2$ **c)** $L = \{a\}$
- 1.5** $L_1 = L_4 = L_5 \supseteq L_2, L_1 = L_4 = L_5 \supseteq L_3, L_1 = L_4 = L_5 \supseteq L_6$, neporovnatelné: L_2, L_3, L_6
 L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
 L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$ tvaru $xyzxyzyz \dots xyz$
 L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
 L_4 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
 L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x, y\}^* \cup \{z\}^*$
 L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x
- 1.6** $L_1 = L_5 \supseteq L_2 \supseteq L_6, L_1 = L_5 \supseteq L_3 \supseteq L_4, L_2 \supseteq L_4$, neporovnatelné: L_2 a L_3, L_6 a L_3, L_6 a L_4
 L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
 L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, kromě ε
 L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
 L_4 – ty slova z L_3 , která mají právě 2 výskyty y
 L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
 L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x
- 1.7 a)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **b)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*$ **c)** $L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **d)** $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cup L_2 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ a pokud naznáme, že ε také začíná a končí stejným znakem, je třeba k řešení přidat $\cup (L_1^* \cap L_2^*)$ **e)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$
f) $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cap L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **g)** $((L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*)^c$
- 1.8 a)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **b)** ano, nutno dokázat obě inkluze \subseteq a \supseteq **c)** ne, $L_1 = \{a\}, L_2 = \{ab\}$ a $L_3 = \{b, \varepsilon\}$ **d)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **e)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **f)** ano, nutno dokázat obě inkluze \subseteq a \supseteq **g)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$
- 1.9 a)** $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, typu 0 **b)** $\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b, c\}^+$, typu 3 (regulární)
- 1.10** $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 2j; j, k \in \mathbb{N}_0\}$, dolní indexy u navržených neterminálů představují zbytek po dělení počtu 'a' (resp. 'b') dvěma

Deterministické konečné automaty, pumping lemma



b) $L = \{a\} \cdot \{b, aa\}^* \cdot \{a\}$ c) $L = (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{aa\})^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cup \{ab\} \cdot \{a, b\}^*) \cup \{b\} \cdot \{a, b\}^*)$



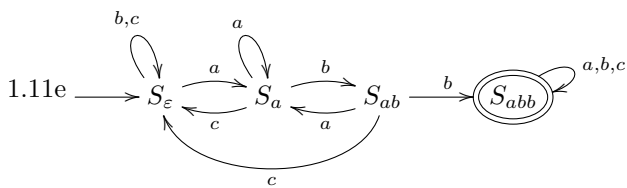
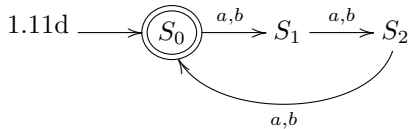
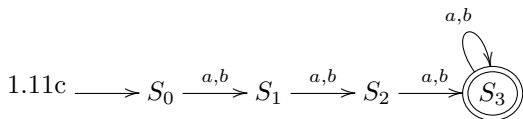
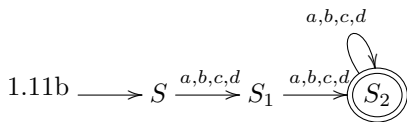
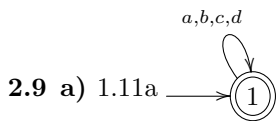


2.4 $L = \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot (\{c\} \cdot \{d\})^* \cup \{b\}$

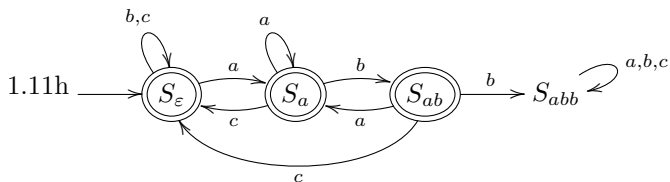
2.5 $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge w = u.v \Rightarrow |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 3\}$

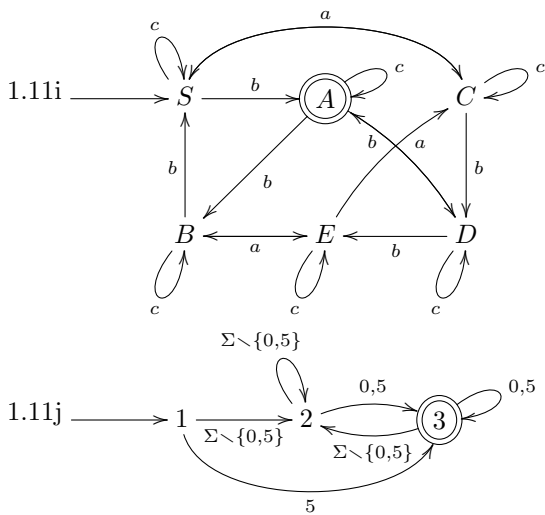
2.6 U příkladu e) je třeba volit slovo $a^n b^{n!+n}$.

2.7 Příklad a) je regulární, b) není, jako slovo lze zvolit například $a^n c b^{n+1}$.



1.11f Není regulární.





Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhillova-)Nerodova věta

3.1 a)

	a	b
→ 1	2	3
2	4	2
3	3	4
← 4	3	2

b)

	a	b
↔ 1	2	3
2	2	3
3	3	4
← 4	4	3

3.2 a)

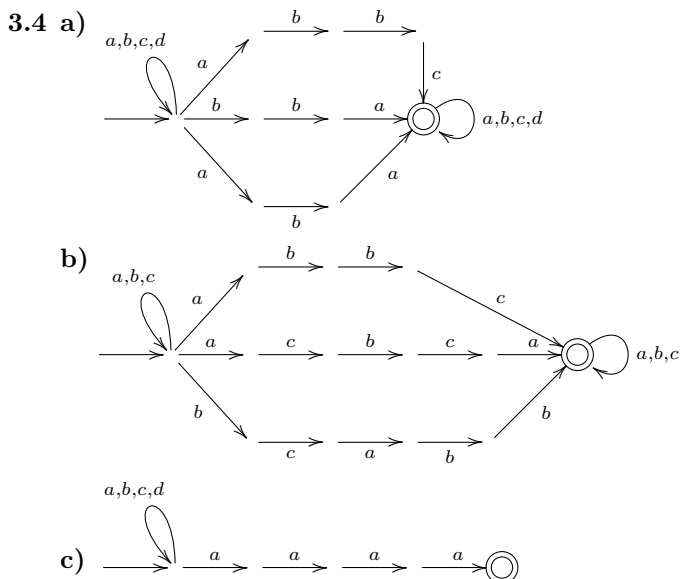
	a	b
→ 1	2	3
2	3	1
3	3	4
4	3	5
← 5	6	5
6	4	6

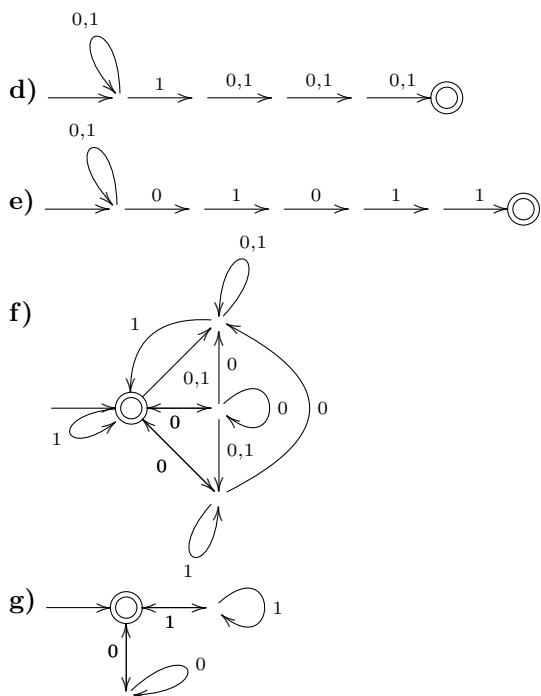
b)

	a	b
→ 1	2	3
2	4	2
← 3	2	3
← 4	5	2
5	6	3
6	6	6

Výsledné automaty v obou případech nejsou ekvivalentní automatům uvedeným v zadání vpravo.

3.3 Není.





3.5 a)

		a	b	c
→	[1]	[23]	[34]	[1]
←	[23]	[123]	[14]	[234]
	[34]	[123]	[1]	[34]
←	[123]	[123]	[134]	[1234]
	[14]	[123]	[134]	[134]
←	[234]	[123]	[14]	[234]
	[134]	[123]	[134]	[134]
←	[1234]	[123]	[134]	[1234]

b)

		a	b	c
→	[1]	[12]	[1]	[]
←	[12]	[12]	[13]	[1]
	[]	[]	[]	[]
	[13]	[12]	[1]	[14]
	[14]	[125]	[1]	[]
←	[125]	[12]	[136]	[1]
	[136]	[127]	[1]	[14]
←	[127]	[12]	[13]	[1]

3.6 $(\{a, b\} \cdot \{b\} \cup \{a, b\} \cdot \{b\} \cdot \{a, b\})^* \cdot \{a, b\} \cdot \{b\}$

3.8 a) Předpokládejme, že takový automat existuje. Pak ze slov a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 musejí dvě nutně padnout do stejné třídy rozkladu Σ^* / \sim_L . Označme je a^i, a^j ($i \neq j$) a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i < j$. Pak platí

$$a^i \cdot a^{4-j} = a^{4+i-j} \notin L$$

$$a^j \cdot a^{4-j} = a^4 \in L,$$

$$\text{a tedy } a^i \not\sim_L a^j \Rightarrow |\sim_L| \geq 5.$$

b) Analogicky jako v a).

3.10 a) Důkaz sporem. Předpokládejme, že L je regulární. Pak prefixová ekvivalence \sim_L má konečný index, označme jej n . Pak ovšem ze slov $a, a^2, a^4, \dots, a^{2^n}$ nutně musí některá dvě slova padnout do stejné třídy rozkladu, označme je a^k, a^l (BÚNO $k \neq l$). Po přiřetění slova a^k dostáváme slovo $a^k a^k \in L$ a slovo $a^l a^k \notin L$. Tím je dosažen spor s $a^k \sim_L a^l$ a proto L není regulární.

b) Analogicky. Ze slov $a, a^2, \dots, a^n, a^{n+1}$ musí být alespoň dvě ekvivalentní. Nechť $a^k \sim_L a^l$ (BÚNO $k < l$). Ovšem $a^k \cdot b^k \in L, a^l \cdot b^k \notin L$.

c) Analogicky. Ze slov $abb, a^2bb, \dots, a^{n+1}bb$ musí být alespoň dvě ekvivalentní. Nechť $a^k bb \sim_L a^l bb$ (BÚNO $k \neq l$). Ovšem $a^k bb \cdot a^k \in L, a^l bb \cdot a^k \notin L$.

d) Analogicky. Ze slov $\varepsilon, a, a^2, \dots, a^n$ musí být alespoň dvě ekvivalentní. Nechť $a^k \sim_L a^l$ (BÚNO $k < l$). Ovšem $a^k \cdot b^k \notin L, a^l \cdot b^k \in L$.

3.11 Definujeme binární relaci \sim takto: $u \sim v \iff \#_a(u) \equiv \#_a(v) \pmod{3}$

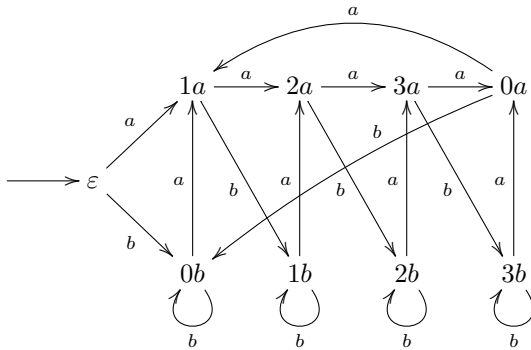
\sim je ekvivalence, \sim je pravá kongruence, $|\sim| = 3$, tedy má konečný index, $L = \{w \mid \#_a(w) \pmod{3} = 0\}$

3.12 a) 4 b) nemá konečný index

3.13 a) \sim je ekvivalence i pravá kongruence, index je 4. L může být libovolný jazyk, jehož minimální automat odpovídá přímo relaci \sim . Takových jazyků je 12, což je vidět po nakreslení automatu (bez akceptujících stavů) podle \sim a zvážení, pro které označení koncových stavů je automat minimální. Jazyky L' jsou právě ty, které lze popsat stejným automatem, ale s takovou množinou koncových stavů, při které automat není minimální. Např. $L' = \{a, b\}^*$.

b) \sim není ekvivalence (není tranzitivní).

c) \sim je ekvivalence i pravá kongruence, index je 9. Lze podle ní sestavit tento automat:



Je vidět, že automat nebude při žádném označení koncových stavů minimální: stavy $\varepsilon, 0a, 0b$ mají stejné přechody a vždy budou alespoň dva z nich označeny jako akceptující nebo neakceptující a tudíž ty dva stavy budou jazykově ekvivalentní. Naopak L' může být jakýkoliv jazyk rozpoznávaný uvedeným automatem s libovolným označením koncových stavů. Takových jazyků L' je tedy celkem 2^9 .

Regulární gramatiky a výrazy \Leftrightarrow FA, ε -kroky, Kleeneho věta

4.1

	a	b	c
$\leftrightarrow \bar{S}$	$\{\bar{A}, q_f\}$	$\{\bar{C}\}$	\emptyset
\bar{A}	$\{\bar{A}\}$	$\{\bar{B}, q_f\}$	$\{q_f\}$
\bar{B}	$\{\bar{B}, \bar{C}\}$	$\{\bar{C}\}$	$\{\bar{A}, q_f\}$
\bar{C}	$\{\bar{A}, q_f\}$	$\{\bar{B}, q_f\}$	\emptyset
$\leftarrow q_f$	\emptyset	\emptyset	\emptyset

4.2

	a	b	c
$\rightarrow \bar{S}$	$\{\bar{X}\}$	$\{\bar{Y}\}$	$\{q_f\}$
\bar{X}	\emptyset	$\{\bar{S}, \bar{X}\}$	\emptyset
\bar{Y}	\emptyset	$\{\bar{S}\}$	$\{\bar{Z}\}$
\bar{Z}	$\{\bar{S}\}$	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$
$\leftarrow q_f$	\emptyset	\emptyset	\emptyset

4.5

	a	b	c	d
$\leftrightarrow 0$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	\emptyset	\emptyset	$\{3, 4\}$
1	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	\emptyset	\emptyset	$\{3, 4\}$
$\leftarrow 2$	$\{3, 4\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
3	\emptyset	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	\emptyset
4	\emptyset	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	\emptyset

4.7

	a	b	c
$\rightarrow 1$	$\{1, 2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	\emptyset
2	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	\emptyset
3	\emptyset	$\{2, 6\}$	\emptyset
4	$\{1, 2, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$
5	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$
$\leftarrow 6$	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$

4.11 a) $(a+b)^*ab$ b) $b^*(ab^*ab^*)^*$ c) $a(a+b)^*a + b(a+b)^*b + a + b$ (pokud ε také začíná a končí stejným symbolem, přičteme ještě ε) d) $((a+b)(a+b))^*$

4.12 a) M_1 je třída všech konečných jazyků.

b) Nechť Σ_1 je nějaká abeceda. Pak $C(\Sigma_1)$ definujeme jako množinu všech slov, kde se každé písmeno z abecedy vyskytuje aspoň jednou, tj.

$$C(\Sigma) = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall a \in \Sigma_1 : \#_a(w) > 0\}.$$

Pak M_2 je třída všech jazyků L takových, že pro všechny Σ_1 , které jsou podmnožinou abecedy jazyka L , platí: $L \cap C(\Sigma_1)$ je konečný nebo $C(\Sigma_1) \setminus L$ je konečný.

Poměrně snadno se ukáže, že M_2 všechny takové jazyky musí obsahovat a že je tato třída zároveň uzavřená na sjednocení, průnik a komplement.

c) M_3 je třída všech konečných jazyků.

Uzávěrové vlastnosti \mathcal{R}

5.1 Neplatí. Jazyky $L_i = \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$ jsou konečné a tudíž regulární, ale $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární.

5.2 $L_i = \{a, b\}^* \setminus \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \{a, b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n > 0\}$, což není regulární jazyk, protože $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární jazyk a regulární jazyky jsou uzavřené na doplněk.

5.3 Neregulární jazyky jsou uzavřené na komplement. U všech ostatních operací lze najít jazyky takové, že výsledkem je neregulární jazyk, i takové, že výsledek je regulární. Nechť $R = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ je jazyk nad $\Sigma = \{a, b\}$. R jistě není regulární.

operace	regulární výsledek	neregulární výsledek
$L_1 \cap L_2$	$R \cap co-R = \emptyset$	$R \cap R = R$
$L_1 \cup L_2$	$R \cup co-R = \Sigma^*$	$R \cup R = R$
$L_1 \setminus L_2$	$R \setminus R = \emptyset$	$R \setminus co-R = R$
$L_1 \cdot L_2$	$(R \cup \{\varepsilon\}) \cdot co-R = \Sigma^*$	$R \cdot R$
L_1^*	$(co-R)^* = \Sigma^*$	R^*

5.4 Platí.

5.5 Ani jedna implikace neplatí.

5.6 Stačí zvolit L_1 jako libovolný neregulární jazyk a L_2 jako doplněk L_1 .

Bezkontextové gramatiky

6.1 a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ b) Jazyk se nedá moc rozumně popsat.

6.4 Ano, každý regulární jazyk je jednoznačný CFL.

6.7 Nelze. Průnik podmínek (slova s nejednoznačným odvozením) nelze popsat bezkontextovou gramatikou (nelze formulovat podmínky disjunktne tak, aby šly popsat pomocí pravidel bezkontextových gramatik).

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.9 Minimální i maximální délka odvození je $2n - 1$.

Zásobníkové automaty, C-Y-K

8.1 b) Ve skriptech je pro PDA definován pojem *krok výpočtu*, ale nikoliv pojem *výpočet*. Lze si představit hned několik definic, které kromě zjevných požadavků (začínáme v iniciální konfiguraci pro daný vstup a každé dvě po sobě jdoucí konfigurace jsou v relaci krok výpočtu) splňují i tyto: (i) Musí se přečíst celý vstup; V tom případě by v příkladu existoval jen 1 výpočet. (ii) Výpočet musí pokračovat “dokud to lze”. V tomto případě existují 4 výpočty. (iii) Stačí přečíst libovolnou část vstupu. V tom případě je výpočtů hodně. c) $L(A) = \{a^{i+j}b^i c^j, a^{i+j}b^j d^i \mid i, j > 0\}$

8.2 a) $\{a^i b^j \mid i > j > 0\}$

8.10 C-Y-K tabulka:

		1							
8	S,A,B,C,D	2							
7	S,A,B,C,D	B	3						
6	S,A	B	S,D	4					
5	S,A,B	-	D	-	5				
4	S,A,B,C,D	B	-	-	S,B	6			
3	S,A	B	-	-	C	B	7		
2	S,A	B	D	-	S	-	C,D	8	
1	A	B	D	C	D	B	A	C	
		k	o	l	a	l	o	k	a

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.3 a) ano b) ne c) ano d) třída bezkontextových jazyků bez vlastnosti sebevlození se rovná třídě regulárních jazyků

Konstrukce Turingových strojů

10.2 Návod: TM bude donekonečna číst vstupní pásku a posouvat se vpravo, nebo bude ve dvou krocích opakovaně posouvat hlavu vlevo a vpravo.

Vztah TM a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.3 a) Neplatí. Stačí vzít libovolný neregulární rekurzivně spočetný L nad abecedou Σ a $R = \Sigma^*$. b) Platí (viz. skripta). c) Platí (viz. skripta). d) Platí. e) Platí. f) Neplatí. Stačí vzít $R \supseteq L$. g) Platí. Plyne z uzavřenosti rekurzivních jazyků na sjednocení.

11.4 a) $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde množina pravidel P obsahuje následující pravidla.

$$\begin{array}{llllll}
 S \rightarrow ABCS \mid \varepsilon & AB \rightarrow BA & AC \rightarrow CA & BC \rightarrow CB & A \rightarrow a & \\
 & BA \rightarrow AB & CA \rightarrow AC & CB \rightarrow BC & B \rightarrow b & \\
 & & & & C \rightarrow c &
 \end{array}$$

Lze snadno upravit na kontextovou gramatiku.

b) $G = (\{S', S, A, B, C, K\}, \{a, b, c\}, P, S')$, kde množina pravidel P obsahuje následující pravidla.

$$\begin{array}{llllll}
 S' \rightarrow SK & Aa \rightarrow aA & Ba \rightarrow aB & Ca \rightarrow aC & & \\
 S \rightarrow aSA \mid bSB \mid cSC \mid \varepsilon & Ab \rightarrow bA & Bb \rightarrow bB & Cb \rightarrow bC & & \\
 K \rightarrow \varepsilon & Ac \rightarrow cA & Bc \rightarrow cB & Cc \rightarrow cC & & \\
 & AK \rightarrow aK & BK \rightarrow bK & CK \rightarrow cK & &
 \end{array}$$

c) Kontextová gramatika: $G = (\{S', S, B, \hat{\square}\}, \{a, b, c\}, P, S')$, kde P obsahuje následující pravidla.

$$\begin{array}{l}
 S' \rightarrow S \mid \varepsilon \mid abc, \\
 S \rightarrow aBSc \mid a\hat{\square}c, \\
 Ba \rightarrow aB, \\
 B\hat{\square} \rightarrow \hat{\square}b \mid bb
 \end{array}$$

11.6 $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TM } A \text{ nezastaví svůj výpočet nad slovem } v\}$

Redukce

- 12.1** **a)** Platí (přímo z definičního vztahu). **b)** Neplatí. $A = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$, $B = \{0\}$, $f(x) = 0$ pokud x je tvaru ww , $f(x) = 1$ jinak. **c)** Platí. **d)** Platí (připomeňme, že $A \leq_m B$ implikuje $co-A \leq_m co-B$). **e)** Neplatí. $A = \emptyset$, B je problém zastavení. $f(x) = y$, kde y je libovolné slovo nad $\{0, 1, \#\}$, které neleží v B . **f)** Platí. $f(w) = \langle M', w \rangle$, kde M' je TM akceptující A takový, že místo do zamítacího stavu začne cyklit. Tedy M' akceptuje w právě když zastaví. Funkce $f(w) = \langle M, w \rangle$, kde M je libovolný zvolený TM akceptující A naopak redukcí být nemusí (např. pokud je A rekurzivní a M je úplný).
- 12.2** A není rekurzivní, protože na něj lze redukovat problém zastavení. A je rekurzivně spočetný (lze ukázat přímo nebo redukcí na problém akceptování). $co-A$ není rekurzivně spočetný (A by pak byl rekurzivní).
- 12.3** Řešením je posloupnost 2, 2, 4, 3, 3, 1, 1.
- 12.4** Lze ukázat redukcí běžného PCP na problém ze zadání.
- 12.5** Lze ukázat redukcí $co-NONEMPTY$ na EQ . $NONEMPTY = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ je TM a } L(\mathcal{M}) \neq \emptyset\}$ je problém neprázdnosti, který je nerozhodnutelný a tudíž i jeho doplněk je nerozhodnutelný.