Lineární modely MB141, bonus

David Kruml

15. 5. 2024

Komentáře ke zkoušce I

- Zkouška je písemná, opravení zpravidla proběhne týž den a zveřejnění do druhého dne, reklamace emailem do týdne.
- Témata zkoušky respektují členění předmětu - 4 okruhy, 4 odpovědní listy.
- Každý okruh je hodnocen 5 body, celkem tak bude možné získat 20 bodů.
- A . . . 16–20, B . . . 14–15, C . . . 12–13, D . . . 10–12, E . . . 8–9, F . . . 0–7.
- Na zkoušku přijďte v 8:00, první blok sestává s okruhů 1 a 2 a bude se psát 8:15–9:15, druhý blok sestává z okruhů 3 a 4 a bude se psát 9:30–10:30.
- Vypněte telefony. Nejsou dovoleny kalkulačky ani písemné materiály. Do lavice si vezměte jen psací potřeby, ISIC nebo jiný průkaz, případně občerstvení (ale na to bude i přestávka).

Komentáře ke zkoušce II

- Odpovídejte jen do správného listu na lícovou stranu.
- Listy budou předtištěné se zadáním — tzv. řádné listy.
- Pokud nestačí řádný list, požádejte o čistý (tzv. mimořádný list) a doplňte na něj číslo okruhu $+10$, u dalšího $+20$, atd. Tento list je opět určen k řešení pouze jednoho tematického okruhu.
- Příklad: U tematického okruhu 2 mi nestačí papír. Požádám tedy o další a označím ho 12. Ani ten ale nestačí, další označím 22.

Komentáře ke zkoušce III

- Každý řádný list sestává z „amerického“ testu a příkladu.
- V testu je třeba z nabídky odpovědí vybrat jednu nebo více správných. Test může obsahovat teoretické i praktické otázky.
- Každý testový příklad je hodnocen 1 bodem a všechny „bity“ musí být správně, tj. i vynechání jedné správné možnosti znehodnotí odpověď.
- Vybranou odpověď vyznačujte křížkem do čtverečku. Pokud křížek chcete smazat, čtvereček vybarvěte. Pokud byste znovu chtěli odpovědět kladně, napište křížek vedle čtverečku.
- U testu se nezajímáme o výpočet nebo zdůvodnění.
- U příkladu je nutné uvést výpočet, samotná odpověď nestačí a nebude uznána.
- Důležité je předvést porozumění podstatě postupu. Numerické chyby opravujeme schovívavěji než např. správný výsledek obdržený nekorektním postupem.

Matice zobrazení — připomenutí

Připomeňme, že každé lineární zobrazení $f : U \to V$ umíme přepsat do matice zobrazení a obraz v f se pak vyjádří jako násobení touto maticí.

Základem našeho postupu je znalost obrazů pro dostatečný počet vektorů z U, ideálně pro nějakou bázi.

Vektory a jejich obrazy přepisujeme řádkově do maticového schématu a pomocí Gaussovy eliminace zjistíme obrazy vektorů standardní báze. (Protože eliminace zachovává lineární kombinace na obou stranách schématu.)

Výslednou matici zobrazení dostaneme transponováním matice na pravé straně.

Obecná matice zobrazení

V některých situacích můžeme potřebovat vyjádření matice zobrazení i v jiných než standardních bazích. Takovou matici značíme $f_{\beta\alpha}$, přičemž α je báze U a β je báze V.

Matice $f_{\beta\alpha}$ pak funguje tak, vstupní vektor $u \in U$ vyjádříme v bázi α a výstupní vektor (obraz) $v = f(u) \in V$ dostaneme v bázi β:

$$f(u)_\beta = f_{\beta\alpha} \cdot u_\alpha$$

Kdybychom uvažovali další lineární zobrazení $g : V \to W$ v bazích β, γ, pro matici složeného zobrazení $g \circ f : U \to W$ platí vzorec:

$$(g \circ f)_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \cdot f_{\beta\alpha}$$

Formule osvětlují i řazení bazí v indexu — chceme je mít vedle sebe, abychom uhlídali návaznost přes stejné báze.

Matice přechodu I

Speciálním případem matice zobrazení je *matice přechodu*[1]. Matice přechodu odpovídá identickému zobrazení, tedy s vektory „nic nedělá“, ale mění se v nich báze prostoru. Matici přechodu od báze α k bázi β značíme $id_{\beta\alpha}$. Její aplikací na vektor u tedy dostaneme z vyjádření v α vyjádření v β:

$$u_\beta = id_{\beta\alpha} \cdot u_\alpha$$

Pro matice přechodu samozřejmě platí totéž co pro obecné matice zobrazení, speciálně

$$\begin{aligned} f_{\epsilon\epsilon} &= id_{\epsilon\beta} \cdot f_{\beta\alpha} \cdot id_{\alpha\epsilon}, \\ f_{\beta\alpha} &= id_{\beta\epsilon} \cdot f_{\epsilon\epsilon} \cdot id_{\epsilon\alpha}, \end{aligned}$$

kde $f_{\epsilon\epsilon}$ je „stará známá“ matice zobrazení ve standardních bazích.

[1] Neplést s přechodovými maticemi z markovských procesů.

Matice přechodu II

Matice přechodu jsou vždy čtvercové, řád odpovídá dimenzi prostoru.

Matice $id_{\epsilon\beta}$ odpovídá vyjádření „škaredé" báze β ve standardní bázi ϵ. To je snadné — stačí β přepsat do sloupců.

Pro matici $id_{\alpha\epsilon}$ to tak snadné není a počítáme ji ze vzorce

$$id_{\alpha\epsilon} = id_{\epsilon\alpha}^{-1}.$$

(Obecněji platí $(f^{-1})_{\alpha\beta} = (f_{\beta\alpha})^{-1}$.)

Matice přechodu mezi stejnými bazemi nemění ani souřadnice, je tedy vždy jednotková:

$$id_{\alpha\alpha} = E.$$

Matici zobrazení ve standardních bazích tedy můžeme alternativně počítat tak, že si vyjádříme zobrazení v nějaké příhodnější bázi nebo bazích a matici obložíme maticemi přechodu.

Příklad I

Najděte matici zrcadlení podle roviny $x + y - z = 0$ v $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Využijeme obecného tvaru roviny k získání normálového vektoru $n = (1, 1, -1)$. Ten se v zrcadlení překlopí: $f(n) = -n$.

Ještě potřebujeme dva nezávislé vektory z roviny, což jsou řešení rovnice, např. $u = (1, 0, 1), v = (0, 1, 1)$. Ty se v zrcadlení nemění: $f(u) = u, f(v) = v$.

„Starým" postupem úlohu dořešíme sestavením řádkového schématu pro u, v, n a jejich obrazy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Příklad II

Matice zobrazení je tedy

$$f_{\epsilon\epsilon} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(Matice je náhodou symetrická, transponování se tedy neprojeví.)

V „Novém“ postupu snadno určíme matici zobrazení

$$f_{\alpha\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

v bázi $\alpha = (u, v, n)$ i matici přechodu

$$id_{\epsilon\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad III

Inverzní matici přechodu $id_{\alpha\epsilon}$ musíme spočítat (jako pravou část výsledného schématu):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Celkem dostáváme:

$$\begin{aligned} f_{\epsilon\epsilon} &= id_{\epsilon\alpha} \cdot f_{\alpha\alpha} \cdot id_{\alpha\epsilon} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$