MB141, 12. 6. 2024, zkouška

1.1 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť A je matice soustavy. Je typu $m \times n$, její hodnost je k a hodnost matice rozšířené je rovněž k. Vyberte všechna obecně platná tvrzení.

☐ $k \leq m$ ☐ dimenze prostoru řešení je k

☐ $m \leq k$ ☐ dimenze prostoru řešení je $n - k$

☐ $k \leq n$ ☐ dimenze prostoru řešení je $m - k$

1.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Vyberte všechny varianty parametrů a, b, pro něž má matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

nulový determinant.

☐ $a = 1, b = 1$ ☐ $a = 1, b = 0$

☐ $a = -1, b = 1$ ☐ $a = 0, b = 0$

☐ $a = 0, b = 1$ ☐ $a = -1, b = 0$

1.3 [3 body] Najděte všechny racionální kořeny polynomu

$$3x^3 - 11x^2 + 8x + 4.$$

2.1 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Určete obsah trojúhelníku ABC, kde $A = [-3, -1], B = [5, 4], C = [1, 6]$.

☐ 9 ☐ 12 ☐ 18

☐ 21 ☐ 36 ☐ 48

2.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Vyberte vlastní vektory pro vlastní číslo -2 matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

☐ $(1, 1, 0)$ ☐ $(1, -1, 0)$ ☐ $(0, 1, 1)$

☐ $(0, 1, -1)$ ☐ $(1, 0, 1)$ ☐ $(1, 0, -1)$

2.3 [3 body] V $\mathbb{R}^3$ určete vzdálenost bodu $A = [5, -5, -5]$ od roviny $\rho : 2x - 3y - 2z = 1$.

3.1 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Najděte primitivní kořeny v modulu 9.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2
☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

3.2 [1 správná, 1 bod] Najděte inverzi k prvku 17 v modulu 38.

☐ 5 ☐ 9 ☐ 13
☐ 17 ☐ 27 ☐ 33

3.3 [3 body] Určete zbytek po dělení čísla 13^{12345} číslem 8.

4.1 [1 správná, 1 bod] Určete dvoustý člen x_{200} rekurentní posloupnosti

$$x_{n+2} = -2x_{n+1} + 3x_n, x_0 = 0, x_1 = 1.$$

☐ $\frac{1}{2}(3^{200} - 2^{200})$ ☐ $\frac{1}{3}(2^{200} - 3^{200})$
☐ $\frac{1}{4}(1 - 2^{200})$ ☐ $\frac{1}{4}(2^{200} - 1)$
☐ $\frac{1}{2}(3^{200} - 1)$ ☐ $\frac{1}{4}(1 - 3^{200})$

4.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Rozhodněte, které z matic jsou maticemi Leslieho populačního modelu.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

4.3 [3 body] Redaktor rádia potřebuje vyplnit hodinu vysílacího času hudbou, vystoupením vtipného moderátora nebo čtením pohádky. Rádio musí pořád něco vysílat, aspoň 50% programu musí tvořit hudba a pohádka musí být aspoň desetiminutová. Náklady (tantiémy) za minutu vysílání jsou u hudby 200 Kč, u moderátora 100 Kč a u pohádky 150 Kč, zisk rádia za minutu vysílání je 300 Kč.

a) [1 bod] Formulujte příklad jako úlohu lineárního programování.

b) [2 body] Řešte úlohu užitím simplexového algoritmu. Určete optimální skladbu vysílání a celkový zisk.

Řešení

1.1 Hodnost matice je vždy menší nebo rovna každému rozměru matice a dimenze prostoru řešení je dána rozdílem počtu proměnných (tj. počtem sloupců) a hodnosti matice. Správné odpovědi jsou 1., 4. a 5.
1.2 Správné jsou všechny odpovědi, v nichž $b = 0$.
1.3 Racionální kořeny p/q musí vyhovovat kritériu $p \mid 4$ a $q \mid 3$. Zkoušíme tedy kandidáty z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 4/3\}$ a prověřujeme je např. Hornerovým schématem. Po nalezení kořene 2 pokračujeme podílem polynomů odpovídajícímu vzniklému řádku Hornerova schématu a zjistíme, že je dvojnásobný. Posledním kořenem je $-1/3$ a můžeme jej přímo vyčíst z lineárního polynomu.
2.1 Z bodů si připravíme dva vektory se společným počátkem, např. $\overrightarrow{AB} = (8, 5), \overrightarrow{AC} = (4, 7)$ a obsah určíme jako polovinu absolutní hodnoty determinantu $\left|\begin{smallmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \end{smallmatrix}\right| = 36$, tj. 18.
2.2 Matice $A + 2E$ má hodnost 1, tj. prostor řešení homogenní soustavy $(A + 2E)v = 0$ je dvourozměrný. Řešením jsou všechny vektory kolmé na vektor $(1, 1, -1)$, což jsou mj. 2., 3. a 5. vektor z nabídky.
2.3 Najdeme patu kolmice B jako $B = A + tn$, kde $n = (2, -3, -2)$ je normálový vektor roviny ρ. Požadavek $B \in \rho$ odpovídá rovnici $(5 + 2t) + (-5 - 3t) + (-5 - 2t) = 1$, odkud $t = -2$. Vzdálenost je tedy $\|tn\| = |t| \cdot \|n\| = 2\sqrt{17}$.
3.1 Po vyloučení soudělných čísel $0, 3, 9$ a zjevně neprimitivní 1 zjistíme, že $4^3 \equiv 1, 7^3 \equiv 1, 8^2 \equiv 1$. Primitivními kořeny jsou tedy pouze 2 a 5.
3.2 Inverze je 9. Řešíme buďto pomocí Bezoutovy rovnosti, nebo si hledání zjednodušíme rozložením modulu $38 = 2 \cdot 19$.
3.3 Podle Eulerovy věty je $13^{\phi(8)} \equiv 5^4 \equiv 1 \pmod 8$. Protože $12345 \equiv 1 \pmod 4$, vychází hledaný zbytek jako $5^1 = 5$. Alternativní postup: Lze si též povšimnout, že liché mocniny 5 dávají zbytek 5 a sudé mocniny 1, výsledkem je tudíž 5.
4.1 Charakteristický polynom $x^2 + 2x - 3$ má kořeny 1 a -3, dosazením do počátečních podmínek určíme koeficienty $1/4$ a $-1/4$, což po úpravě odpovídá 6. možnosti.
4.2 Leslieho matice má v prvním řádku přírůstky potomstva a na zkrácené diagonále pod hlavní diagonálou pravděpodobnosti přežití do další generace. Z nabídky tomuto vyhovují pouze 2. a 4. matice.
4.3 Označme po řadě h, m, p minuty přidělené hudbě, moderátorovi a pohádce. Omezení a účelovou funkci upravíme do tvaru:

$$
\begin{aligned}
h, m, p &\geq 0, & h + m + p &= 60, \\
m + p &\leq 30, & h + m &\leq 50, \\
c &= 100h + 200m + 150p
\end{aligned}
$$

Sestavíme simplexovou tabulku a postupně ji upravíme:

$$
\left[\begin{array}{ccc|cc|c}
-100 & -200 & -150 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 50
\end{array}\right]
\sim \cdots \sim
\left[\begin{array}{ccc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 100 & 50 & 8500 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 20 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 30
\end{array}\right]
$$

Jedničky v levé dolní části se objevily v roli pivotů, odečítáme z nich tedy řešení $p = 10, m = 20, h = 30$ při zisku 8500 Kč.´