MB141, 12. 6. 2024, zkouška

1.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Nechť

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

je celočíselný polynom a p/q jeho racionální kořen. Předpokládáme, že p, q jsou nesoudělná. Vyberte všechna obecně platná tvrzení.

☐ $p \mid a_n$	☐ $q \mid a_n$
☐ $p \mid a_1$	☐ $q \mid a_1$
☐ $p \mid a_0$	☐ $q \mid a_0$

1.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Vyberte všechny (komplexní) kořeny polynomu

$$x^3 = i.$$

☐ i	☐ $-i$
☐ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$	☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$
☐ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$	☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

1.3 [3 body] Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Z následujících vektorů v $\mathbb{R}^3$ vyberte všechny patřící do roviny generované vektory $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$.

☐ $(0, 1, 2)$	☐ $(1, 1, 1)$
☐ $(3, 2, 1)$	☐ $(0, 0, 0)$
☐ $(1, 3, 5)$	☐ $(1, 2, 4)$

2.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Vyberte vlastní vektory s příslušným vlastním číslem λ symetrie prostoru $\mathbb{R}^3$ zrcadlení podle roviny $x - y = 0$.

☐ $(1, 1, 0), \lambda = -1$	☐ $(1, -1, 0), \lambda = -1$
☐ $(0, 0, 1), \lambda = 0$	☐ $(1, 1, 0), \lambda = 1$
☐ $(1, -1, 0), \lambda = 1$	☐ $(0, 0, 1), \lambda = 1$

2.3 [3 body] Určete matici zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které splňuje

$$f(1, -1, 1) = (-3, 0),$$
$$f(1, 2, -1) = (0, 4),$$
$$f(0, 2, 1) = (2, 5).$$

3.1 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Najděte primitivní kořeny v modulu 7.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

3.2 [1 správná, 1 bod] Najděte inverzi k prvku 19 v modulu 33.

☐ 7 ☐ 11 ☐ 15

☐ 19 ☐ 23 ☐ 27

3.3 [3 body] Určete zbytek po dělení čísla 13^{12345} číslem 15.

4.1 [1 správná, 1 bod] Určete hodnotu účelové funkce v optimu úlohy lineárního programování s počáteční simplexovou tabulkou

$$\begin{array}{|ccc|cc|c|}\hline -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

☐ $11/2$ ☐ $14/3$ ☐ $17/4$

☐ $19/2$ ☐ $21/4$ ☐ $23/3$

4.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Rozhodněte, které z matic jsou maticemi Leslieho populačního modelu.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

4.3 [3 body] Markovský proces sestává ze tří stavů A, B, C. V každé iteraci systém mění stav a víme, že pravděpodobnost přechodu z A do B je $1/3$, z B do C je $1/2$ a z C do A je $2/3$.

a) [1 bod] Určete zbývající pravděpodobnosti a sestavte markovskou matici procesu.

b) [2 body] Určete pravděpodobnost, se kterou se systém po dostatečně dlouhém opakování bude nacházet ve stavu B.

Řešení

1.1 $p \mid a_0, q \mid a_n$.
1.2 $-i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, při výpočtu využíváme Moivreovu větu.
1.3 24, lze počítat mnoha způsoby, např. přeskládáním řádků nebo rovnou z definice.
2.1 Zadání splňují 1.–5. vektor. Řešíme např. sloupcovým přepisem do společného schématu a úpravou na schodový tvar.
2.2 Vektory $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ leží v rovině, jsou tedy vlastní s vlastním číslem 1. Vektor $(1, -1, 0)$ je normálovým k rovině, jeho vlastní číslo je tedy -1.
2.3 Úlohu řešíme přepisem vektorů o jejich obrazů do maticového schématu, úpravou levé části na jednotkovou matici a transponováním výsledku vpravo. Matice vyjde

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Zjistíme, že $1^1 \equiv 1, 2^3 \equiv 1, 4^3 \equiv 1, 6^2 \equiv 1 \pmod 7$. Primitivními kořeny jsou tedy pouze 3 a 5.
3.2 Inverze je 7. Řešíme buďto pomocí Bezoutovy rovnosti, nebo si hledání zjednodušíme rozložením modulu $33 = 3 \cdot 11$.
3.3 Podle Eulerovy věty je $13^{\phi(15)} \equiv (-2)^8 \equiv 1 \pmod{15}$. Protože $12345 \equiv 1 \pmod 8$, vychází hledaný zbytek jako $(-2)^1 \equiv 13 \pmod{15}$. (Dokonce platí $(-2)^4 \equiv 1$, a stačilo tak počítat jednodušeji s využitím $12345 \equiv 1 \pmod 4$.)
4.1 Po třech úpravách dostáváme optimální tabulku s řešením $(0, 4, 3/2)$ a hodnotou účelové funkce $19/2$.
4.2 Leslieho matice má v prvním řádku přírůstky potomstva a na zkrácené diagonále pod hlavní diagonálou pravděpodobnosti přežití do další generace. Z nabídky tomuto vyhovují pouze 2. a 4. matice.
4.3 Protože se stav procesu vždy změní, má matice markovského procesu na hlavní diagonále 0. Zbylé pravděpodobnosti musí dávat se známými dohromady 1, dostaneme tak matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešením homogenní soustavy $(M - E)v = 0$ je např. vektor $v = (3, 2, 3)$, jehož normalizací (vydělením $3 + 2 + 3 = 8$) dostaneme hledanou pravděpodobnost pro stav B rovnu $1/4$.