Ekvivalence a rozklady

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

Abstrakt

V této kapitole připomeneme pojem (binární) relace a některé speciální relace (reflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická, **ekvivalence**).

Abstrakt

V této kapitole připomeneme pojem (binární) relace a některé speciální relace (reflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická, **ekvivalence**).
Pokračujeme pak pojmem **jádra zobrazení** jakožto relace na množině.

Abstrakt

V této kapitole připomeneme pojem (binární) relace a některé speciální relace (reflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická, **ekvivalence**).
Pokračujeme pak pojmem **jádra zobrazení** jakožto relace na množině.
Stěžejním pojmem je pojem **rozkladu množiny**, který koresponduje relaci ekvivalence na množině.

Abstrakt

V této kapitole připomeneme pojem (binární) relace a některé speciální relace (reflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická, **ekvivalence**).
Pokračujeme pak pojmem **jádra zobrazení** jakožto relace na množině.
Stěžejním pojmem je pojem **rozkladu množiny**, který koresponduje relaci ekvivalence na množině.
Aplikací výše uvedených pojmů zkonstruujeme množinu **racionálních čísel**.

Obsah přednášky

- Úvod
- Reflexivní, tranzitivní, symetrická a antisymetrická relace.
- Relace ekvivalence.

Obsah přednášky

- Úvod
- Reflexivní, tranzitivní, symetrická a antisymetrická relace.
- Relace ekvivalence.
- Jádro zobrazení
- Rozklad množiny.

Obsah přednášky

- Úvod
- Reflexivní, tranzitivní, symetrická a antisymetrická relace.
- Relace ekvivalence.
- Jádro zobrazení
- Rozklad množiny.
- Konstrukce racionálních čísel.

Opakování - relace

Nechť A je množina a nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo. Pak libovolnou podmnožinu ϱ kartézské mocniny A^n nazýváme n**-ární relací** na množině A.

Opakování - relace

Nechť A je množina a nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo. Pak libovolnou podmnožinu ϱ kartézské mocniny A^n nazýváme n**-ární relací** na množině A.

Je-li $n = 1$, pak ϱ je podmnožinou množiny $A = A^1$ a říkáme též, že ϱ je **unární** relace na A.

Opakování - relace

Nechť A je množina a nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo. Pak libovolnou podmnožinu ϱ kartézské mocniny A^n nazýváme n**-ární relací** na množině A.

Je-li $n = 1$, pak ϱ je podmnožinou množiny $A = A^1$ a říkáme též, že ϱ je **unární** relace na A.

Je-li $n = 2$, tedy je-li $\varrho \subseteq A^2$, říkáme, že ϱ je **binární** relace na A.

Opakování - relace

Nechť A je množina a nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo. Pak libovolnou podmnožinu ϱ kartézské mocniny A^n nazýváme **n-ární relací** na množině A.

Je-li $n = 1$, pak ϱ je podmnožinou množiny $A = A^1$ a říkáme též, že ϱ je **unární** relace na A.

Je-li $n = 2$, tedy je-li $\varrho \subseteq A^2$, říkáme, že ϱ je **binární** relace na A.
Je-li $n = 3$, tj. $\varrho \subseteq A^3$, říkáme, že ϱ je **ternární** relace na A.

Reflexivní relace

Pro libovolnou množinu A je identické zobrazení id_A relací na množině A, značí se též Δ_A, takže $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, a nazývá se **diagonální relace** na A.

Reflexivní relace

Pro libovolnou množinu A je identické zobrazení id_A relací na množině A, značí se též Δ_A, takže $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$, a nazývá se **diagonální relace** na A.

Relace ϱ na A se nazývá **reflexivní**, je-li splněno $\Delta_A \subseteq \varrho$, tedy platí-li

$$(\forall a \in A)(a \, \varrho \, a).$$

Reflexivní relace

Pro libovolnou množinu A je identické zobrazení id_A relací na množině A, značí se též Δ_A, takže $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$, a nazývá se **diagonální relace** na A.

Relace ϱ na A se nazývá **reflexivní**, je-li splněno $\Delta_A \subseteq \varrho$, tedy platí-li

$$(\forall a \in A)(a \, \varrho \, a).$$

reflexivnost : a) každý bod je opatřen smyčkou,
b) v hlavní diagonále tabulky jsou samé jedničky.

Symetrická relace

Relace ϱ na A se nazývá **symetrická**, je-li splněno $\varrho = \varrho^{-1}$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \, \varrho \, b \implies b \, \varrho \, a).$$

Symetrická relace

Relace ϱ na A se nazývá **symetrická**, je-li splněno $\varrho = \varrho^{-1}$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \,\varrho\, b \implies b \,\varrho\, a).$$

symetrie : a) mezi dvěma různými body jsou buď dvě šipky nebo žádná šipka

b) tabulka je symetrická podle hlavní diagonály

Antisymetrická relace

Relace ϱ na A se nazývá **antisymetrická**, je-li splněno $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq \Delta_A$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \,\varrho\, b \;\&\; b \,\varrho\, a \implies a = b).$$

Antisymetrická relace

Relace ϱ na A se nazývá **antisymetrická**, je-li splněno $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq \Delta_A$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a\,\varrho\,b \;\&\; b\,\varrho\,a \implies a = b).$$

antisymetrie : a) mezi dvěma různými body je buď jedna nebo žádná šipka

b) dvě různá políčka symetrická po hlavní diagonály obsahují nejvýs jednu jedničku

Úplná relace

Relace ϱ na A se nazývá **úplná**, je-li splněno $\varrho \cup \varrho^{-1} \supseteq A \times A$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a\,\varrho\,b \quad \vee \quad b\,\varrho\,a\,).$$

Úplná relace

Relace ϱ na A se nazývá **úplná**, je-li splněno $\varrho \cup \varrho^{-1} \supseteq A \times A$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \,\varrho\, b \;\vee\; b \,\varrho\, a).$$

úplnost : a) každý bod je opatřen smyčkou a každé dva různé body jsou spojen šipkou

b) v hlavní diagonále jsou samé jedničk a dvě různá políčka symetrická podl hlavní diagonály obsahují alespoň jednu jedničku

Tranzitivní a asymetrická relace

Relace ϱ na A se nazývá **tranzitivní**, je-li splněno $\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$, tedy platí-li

$$(\forall a, b, c \in A)(a \,\varrho\, b \ \& \ b \,\varrho\, c \implies a \,\varrho\, c).$$

Tranzitivní a asymetrická relace

Relace ϱ na A se nazývá **tranzitivní**, je-li splněno $\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$, tedy platí-li

$$(\forall a, b, c \in A)(a \,\varrho\, b \;\&\; b \,\varrho\, c \implies a \,\varrho\, c).$$

Relace ϱ na A se nazývá **asymetrická**, je-li splněno $\varrho \cap \varrho^{-1} = \emptyset$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \,\varrho\, b \implies b \,\not\varrho\, a).$$

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}\,,\ \ B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}\,,\;\; B = \mathbb{N}\,$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

reflexivní	??
symetrická	
antisymetrická	
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

reflexivní	NE
symetrická	??
antisymetrická	
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

reflexivní	NE
symetrická	NE
antisymetrická	??
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}\,, \;\; B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

reflexivní	NE
symetrická	NE
antisymetrická	ANO
tranzitivní	??
úplná	

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

reflexivní	NE
symetrická	NE
antisymetrická	ANO
tranzitivní	ANO
úplná	??

Příklady relací I

Příklad E 1. Nechť $A = \mathbb{N}\,,\ \ B = \mathbb{N}\,$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

reflexivní	NE
symetrická	NE
antisymetrická	ANO
tranzitivní	ANO
úplná	NE

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

	prázdná relace	univerzální relace
reflexivní	??	??
symetrická		
antisymetrická		
tranzitivní		
úplná		

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

	prázdná relace	univerzální relace
reflexivní	NE	ANO
symetrická	??	??
antisymetrická		
tranzitivní		
úplná		

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

	prázdná relace	univerzální relace
reflexivní	NE	ANO
symetrická	ANO	ANO
antisymetrická	??	??
tranzitivní		
úplná		

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

	prázdná relace	univerzální relace
reflexivní	NE	ANO
symetrická	ANO	ANO
antisymetrická	ANO	NE
tranzitivní	??	??
úplná		

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

	prázdná relace	univerzální relace
reflexivní	NE	ANO
symetrická	ANO	ANO
antisymetrická	ANO	NE
tranzitivní	ANO	ANO
úplná	??	??

Příklady relací II

Příklad E 2. Nechť A je množina. Dva speciální případy relací na množině A jsou **prázdná množina** (relace) a **univerzální relace** $A \times A$.

	prázdná relace	univerzální relace
reflexivní	NE	ANO
symetrická	ANO	ANO
antisymetrická	ANO	NE
tranzitivní	ANO	ANO
úplná	NE	ANO

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \ : \ X \subseteq Y\}$.

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \ : \ X \subseteq Y\}$.

reflexivní	??
symetrická	
antisymetrická	
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \;:\; X \subseteq Y\}$.

reflexivní	ANO
symetrická	??
antisymetrická	
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \ : \ X \subseteq Y\}$.

reflexivní	ANO
symetrická	NE
antisymetrická	??
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \ : \ X \subseteq Y\}$.

reflexivní	ANO
symetrická	NE
antisymetrická	ANO
tranzitivní	??
úplná	

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \;:\; X \subseteq Y\}$.

reflexivní	ANO
symetrická	NE
antisymetrická	ANO
tranzitivní	ANO
úplná	??

Příklady relací III

Příklad E 3. Buď A množina. Uvažme relaci $R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \;:\; X \subseteq Y\}$.

reflexivní	ANO
symetrická	NE
antisymetrická	ANO
tranzitivní	ANO
úplná	NE

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

reflexivní	??
symetrická	
antisymetrická	
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

reflexivní	ANO
symetrická	??
antisymetrická	
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

reflexivní	ANO
symetrická	ANO
antisymetrická	??
tranzitivní	
úplná	

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

reflexivní	ANO
symetrická	ANO
antisymetrická	ANO
tranzitivní	??
úplná	

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

reflexivní	ANO
symetrická	ANO
antisymetrická	ANO
tranzitivní	ANO
úplná	??

Příklady relací IV

Příklad E 4. Buď A množina. Množina $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ je relace rovnosti na A.

reflexivní	ANO
symetrická	ANO
antisymetrická	ANO
tranzitivní	ANO
úplná	NE

Relace ekvivalence

Relace θ na množině A, která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá **ekvivalence** na A.

Relace ekvivalence

Relace θ na množině A, která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá **ekvivalence** na A.

Jsou-li prvky $a, b \in A$ takové, že $a\,\theta\,b$, říkáme, že prvek a je ekvivalentní prvku b podle θ.

Relace ekvivalence

Relace θ na množině A, která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá **ekvivalence** na A.

Jsou-li prvky $a, b \in A$ takové, že $a \, \theta \, b$, říkáme, že prvek a je ekvivalentní prvku b podle θ.

Příklady ekvivalencí na množině A - *diagonální* (nejmenší) a *univerzální relace* (největší).

Jádro zobrazení

Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Definujme relaci $\ker f$ na A předpisem:

$$(\forall a, b \in A)((a, b) \in \ker f \iff f(a) = f(b)).$$

Jádro zobrazení

Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Definujme relaci $\ker f$ na A předpisem:

$$(\forall a, b \in A)((a, b) \in \ker f \iff f(a) = f(b)).$$

Pak $\ker f$ je ekvivalence na A a nazývá se **jádro** zobrazení f.

Rozklad množiny

Buď A množina a buď $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ libovolný soubor podmnožin množiny A splňující podmínky:

$$\emptyset \notin \mathcal{R},$$

$$(\forall X, Y \in \mathcal{R})(X \neq Y \implies X \cap Y = \emptyset),$$

$$\bigcup \mathcal{R} = A.$$

Rozklad množiny

Buď A množina a buď $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ libovolný soubor podmnožin množiny A splňující podmínky:

$$\emptyset \notin \mathcal{R},$$

$$(\forall X, Y \in \mathcal{R})(X \neq Y \implies X \cap Y = \emptyset),$$

$$\bigcup \mathcal{R} = A.$$

Pak $\mathcal{R}$ se nazývá **rozklad** množiny A.

Rozklad množiny

Buď A množina a buď $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ libovolný soubor podmnožin množiny A splňující podmínky:

$$\emptyset \notin \mathcal{R},$$

$$(\forall X, Y \in \mathcal{R})(X \neq Y \implies X \cap Y = \emptyset),$$

$$\bigcup \mathcal{R} = A.$$

Pak $\mathcal{R}$ se nazývá **rozklad** množiny A. Množiny, jež jsou prvky $\mathcal{R}$ se nazývají **třídy rozkladu** $\mathcal{R}$.

Intuitivní představa

Rozklad na množině je možné si schematicky představit tak, že množinou A je kus papíru, který nůžkami rozstříháme na kousky, což budou příslušné třídy rozkladu.

Intuitivní představa

Rozklad na množině je možné si schematicky představit tak, že množinou A je kus papíru, který nůžkami rozstříháme na kousky, což budou příslušné třídy rozkladu.

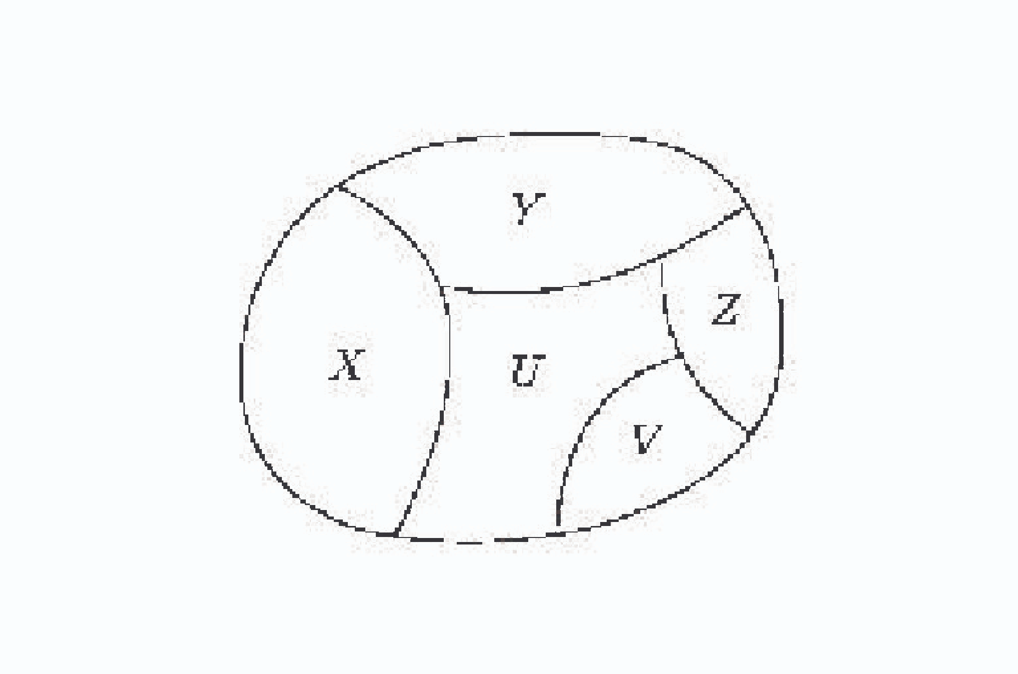
Názorně řečeno, rozklad $\mathcal{R}$ reprezentuje rozdělení množiny A na soubor neprázdných vzájemně disjunktních tříd.

Grafické znázornění rozkladu

Rozklad na množině si můžeme ilustrovat náčrtkem podobného tvaru, jaký je uveden na následujícím obrázku.

Grafické znázornění rozkladu

Rozklad na množině si můžeme ilustrovat náčrtkem podobného tvaru, jaký je uveden na následujícím obrázku.



Příklady rozkladů - I

Příklad D.1 Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pro libovolný prvek $b \in f(A)$ definujme množinu

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid b = f(a)\}.$$

Příklady rozkladů - I

Příklad D.1 Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pro libovolný prvek $b \in f(A)$ definujme množinu

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid b = f(a)\}.$$

Pak soubor množin

$$\{f^{-1}(b) \mid b \in f(A)\}$$

tvoří rozklad množiny A. Říkáme, že jde o rozklad množiny A **indukovaný** zobrazením f.

Příklady rozkladů - II

Příklad D.2 Nechť A je libovolná neprázdná množina. Pak nejjednodušššími příklady rozkladů na množině A jsou následující dva rozklady :

Příklady rozkladů - II

Příklad D.2 Nechť A je libovolná neprázdná množina. Pak nejjednodušším příklady rozkladů na množině A jsou následující dva rozklady :

- $\mathcal{R} = \{\{a\} : \text{pro každé } a \in A\}$, což je rozklad, který má tolik tříd, kolik prvků má množina A, přičemž každá jeho třída obsahuje vždy právě jeden prvek

Příklady rozkladů - II

Příklad D.2 Nechť A je libovolná neprázdná množina. Pak nejjednodušššími příklady rozkladů na množině A jsou následující dva rozklady :

- $\mathcal{R} = \{\{a\} : \text{pro každé } a \in A\}$, což je rozklad, který má tolik tříd, kolik prvků má množina A , přičemž každá jeho třída obsahuje vždy právě jeden prvek
- $\mathcal{R} = \{A\}$, což je rozklad, který má jedinou třídu, a to množinu A .

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,
- $\{-1, 0\}$,

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,
- $\{-1, 0\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ je sudé, kladné$\}$,

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,
- $\{-1, 0\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ je sudé, kladné$\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ je liché, kladné$\}$

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,
- $\{-1, 0\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ je sudé, kladné$\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ je liché, kladné$\}$

tvoří rozklad na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel.

Příklady rozkladů - III

Příklad D.3 Nechť $A = \mathbb{Z}$. Pak množiny

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2\}$,
- $\{-1, 0\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ je sudé, kladné}\}$,
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ je liché, kladné}\}$

tvoří rozklad na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel. Tento rozklad má 4 třídy, z nichž tři třídy mají nekonečně mnoho prvků a jedna třída má konečně mnoho prvků.

Příklady rozkladů - IV

Příklad D.4 Nechť $A = \mathbb{R}$.

Příklady rozkladů - IV

Příklad D.4 Nechť $A = \mathbb{R}$. Pro libovolné celé číslo k označme symbolem I_k reálný interval $<k\,,\ k+1)$, tzn.:

Příklady rozkladů - IV

Příklad D.4 Nechť $A = \mathbb{R}$. Pro libovolné celé číslo k označme symbolem I_k reálný interval $<k\,,\, k+1)$, tzn.:

- $I_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k \leq x < k+1\}$.

Příklady rozkladů - IV

Příklad D.4 Nechť $A = \mathbb{R}$. Pro libovolné celé číslo k označme symbolem I_k reálný interval $<k\,,\ k+1)$, tzn.:

- $I_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k \leq x < k+1\}$.

Potom $\mathcal{R} = \{I_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je rozklad na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Příklady rozkladů - IV

Příklad D.4 Nechť $A = \mathbb{R}$. Pro libovolné celé číslo k označme symbolem I_k reálný interval $<k\,,\, k+1)$, tzn.:

- $I_k = \{x \in \mathbb{R} \mid k \leq x < k+1\}$.

Potom $\mathcal{R} = \{I_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je rozklad na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Tento rozklad má nekonečně mnoho tříd a každá jeho třída má nekonečně mnoho prvků.

Třída ekvivalence

Buď θ ekvivalence na množině A. Pro každý prvek $a \in A$ definujeme množinu

$$[a]\theta = \{b \in A \mid a\,\theta\,b\}.$$

Třída ekvivalence

Buď θ ekvivalence na množině A. Pro každý prvek $a \in A$ definujeme množinu

$$[a]\theta = \{b \in A \mid a \, \theta \, b\}.$$

Tato množina se nazývá **třída ekvivalence** θ určená prvkem a.

Vlastnosti tříd ekvivalence

Tvrzení. Buď θ ekvivalence na množině A. Pak pro kterékoliv dva prvky $a, b \in A$ platí:

Vlastnosti tříd ekvivalence

Tvrzení. Buď θ ekvivalence na množině A. Pak pro kterékoliv dva prvky $a, b \in A$ platí:

$$a \in [a]\theta,$$

Vlastnosti tříd ekvivalence

Tvrzení. Buď θ ekvivalence na množině A. Pak pro kterékoliv dva prvky $a, b \in A$ platí:

$$a \in [a]\theta,$$

$$[a]\theta \cap [b]\theta \neq \emptyset \iff [a]\theta = [b]\theta \iff a\,\theta\,b.$$

Rozklad podle ekvivalence

Soubor množin

$$A/\theta = \left\{ [a]\theta \mid a \in A \right\}$$

tvoří rozklad množiny A.

Rozklad podle ekvivalence

Soubor množin

$$A/\theta = \{[a]\theta \mid a \in A\}$$

tvoří rozklad množiny A.

Mluvíme o ***rozkladu podle ekvivalence*** θ, nebo též o **faktorové množině** ekvivalence θ na A.

Rozklad podle ekvivalence

Soubor množin

$$A/\theta = \left\{ [a]\theta \mid a \in A \right\}$$

tvoří rozklad množiny A.

Mluvíme o ***rozkladu podle ekvivalence*** θ, nebo též o **faktorové množině** ekvivalence θ na A.

Vytvořili jsme rozklad množiny A na třídy prvků vzájemně ekvivalentních podle θ.

Příklady rozkladů - V

Příklad D.5 Nechť A je libovolná neprázdná množina.

Příklady rozkladů - V

Příklad D.5 Nechť A je libovolná neprázdná množina.

- faktorová množina A/Δ_A je rovna rozkladu $\{\{a\} \mid a \in A\}$,

Příklady rozkladů - V

Příklad D.5 Nechť A je libovolná neprázdná množina.

- faktorová množina A/Δ_A je rovna rozkladu $\{\{a\} \mid a \in A\}$,
- faktorová množina $A\,/\,A{\times}A$ je rovna rozkladu $\{A\}$.

Příklady rozkladů - VI

Příklad D.6 Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Příklady rozkladů - VI

Příklad D.6 Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Pak faktorová množina $A/\ker f$ je právě výše popsaný (příklad D.1) rozklad množiny A indukovaný zobrazením f.

Příklady rozkladů - VI

Příklad D.6 Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Pak faktorová množina $A/\mathrm{ker}\, f$ je právě výše popsaný (příklad D.1) rozklad množiny A indukovaný zobrazením f.

Navíc pro obraz $f(A)$ při tomto zobrazení platí

$$f(A) \cong A/\mathrm{ker}\, f.$$

Ekvivalence příslušná rozkladu

Buď nyní $\mathcal{R}$ rozklad množiny A.

Ekvivalence příslušná rozkladu

Buď nyní $\mathcal{R}$ rozklad množiny A.

Definujeme relaci $\equiv_{\mathcal{R}}$ na množině A předpisem

$$(\forall a, b \in A)(a \equiv_{\mathcal{R}} b \iff (\exists\, X \in \mathcal{R})(a, b \in X)).$$

Ekvivalence příslušná rozkladu

Buď nyní $\mathcal{R}$ rozklad množiny A.

Definujeme relaci $\equiv_{\mathcal{R}}$ na množině A předpisem

$$(\forall a, b \in A)(a \equiv_{\mathcal{R}} b \iff (\exists\, X \in \mathcal{R})(a, b \in X)).$$

Protože $\mathcal{R}$ je rozklad množiny A, je $\equiv_{\mathcal{R}}$ ekvivalence na A.

Ekvivalence příslušná rozkladu

Buď nyní $\mathcal{R}$ rozklad množiny A.

Definujeme relaci $\equiv_{\mathcal{R}}$ na množině A předpisem

$$(\forall a, b \in A)(a \equiv_{\mathcal{R}} b \iff (\exists\, X \in \mathcal{R})(a, b \in X)).$$

Protože $\mathcal{R}$ je rozklad množiny A, je $\equiv_{\mathcal{R}}$ ekvivalence na A.

Dva prvky $a, b \in A$ jsou ekvivalentní podle $\equiv_{\mathcal{R}}$ právě když leží ve stejné třídě rozkladu $\mathcal{R}$.

Ekvivalence příslušná rozkladu

Buď nyní $\mathcal{R}$ rozklad množiny A.

Definujeme relaci $\equiv_{\mathcal{R}}$ na množině A předpisem

$$(\forall a, b \in A)(a \equiv_{\mathcal{R}} b \iff (\exists\, X \in \mathcal{R})(a, b \in X)).$$

Protože $\mathcal{R}$ je rozklad množiny A, je $\equiv_{\mathcal{R}}$ ekvivalence na A.

Dva prvky $a, b \in A$ jsou ekvivalentní podle $\equiv_{\mathcal{R}}$ právě když leží ve stejné třídě rozkladu $\mathcal{R}$.

Mluvíme o **ekvivalenci na A příslušné rozkladu** $\mathcal{R}$.

Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady

Označme $\mathcal{E}(A)$ množinu všech ekvivalencí na A a $\Pi(A)$ množinu všech rozkladů množiny A.

Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady

Označme $\mathcal{E}(A)$ množinu všech ekvivalencí na A a $\Pi(A)$ množinu všech rozkladů množiny A.

Věta. Buď A množina. Pak zobrazení

$$\varphi : \mathcal{E}(A) \to \Pi(A) \quad \text{a} \quad \psi : \Pi(A) \to \mathcal{E}(A)$$

Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady

Označme $\mathcal{E}(A)$ množinu všech ekvivalencí na A a $\Pi(A)$ množinu všech rozkladů množiny A.

Věta. Buď A množina. Pak zobrazení

$$\varphi : \mathcal{E}(A) \to \Pi(A) \quad \text{a} \quad \psi : \Pi(A) \to \mathcal{E}(A)$$

dané pro každou ekvivalenci θ na A a pro každý rozklad $\mathcal{R}$ množiny A předpisem

$$\varphi(\theta) = A/\theta \quad \text{a} \quad \psi(\mathcal{R}) = \equiv_{\mathcal{R}}$$

Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady

Označme $\mathcal{E}(A)$ množinu všech ekvivalencí na A a $\Pi(A)$ množinu všech rozkladů množiny A.

Věta. Buď A množina. Pak zobrazení

$$\varphi : \mathcal{E}(A) \to \Pi(A) \quad \text{a} \quad \psi : \Pi(A) \to \mathcal{E}(A)$$

dané pro každou ekvivalenci θ na A a pro každý rozklad $\mathcal{R}$ množiny A předpisem

$$\varphi(\theta) = A/\theta \quad \text{a} \quad \psi(\mathcal{R}) = \equiv_{\mathcal{R}}$$

jsou vzájemně inverzní bijekce $\mathcal{E}(A)$ a $\Pi(A)$.

Konstrukce racionálních čísel - I

Ukážeme, jak s pomocí ekvivalencí a rozkladů lze z množiny

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

všech přirozených čísel a z množiny

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

všech celých čísel sestrojit množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel.

Konstrukce racionálních čísel - II

Racionální čísla jsou zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$.

Konstrukce racionálních čísel - II

Racionální čísla jsou zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Pro libovolná $p, s \in \mathbb{Z}$ a $q, t \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \iff p \cdot t = s \cdot q,$$

kde $p \cdot t, s \cdot q \in \mathbb{Z}$.

Konstrukce racionálních čísel - II

Racionální čísla jsou zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Pro libovolná $p, s \in \mathbb{Z}$ a $q, t \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \iff p{\cdot}t = s{\cdot}q,$$

kde $p{\cdot}t, s{\cdot}q \in \mathbb{Z}$. Budeme definovat na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ relaci $\approx$ následovně:

Konstrukce racionálních čísel - II

Racionální čísla jsou zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Pro libovolná $p, s \in \mathbb{Z}$ a $q, t \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \iff p \cdot t = s \cdot q,$$

kde $p \cdot t, s \cdot q \in \mathbb{Z}$. Budeme definovat na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ relaci $\approx$ následovně: Pro libovolná $p, s \in \mathbb{Z}$ a $q, t \in \mathbb{N}$ klademe

$$(p, q) \approx (s, t) \iff p \cdot t = s \cdot q.$$

Konstrukce racionálních čísel - III

$\approx$ je ekvivalence na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Konstrukce racionálních čísel - III

$\approx$ je ekvivalence na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Máme pak faktorovou množinu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$.

Konstrukce racionálních čísel - III

$\approx$ je ekvivalence na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Máme pak faktorovou množinu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$. Zobrazení

$$\xi \ : \ \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$$

dané pro každá $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ předpisem

$$\xi\left(\frac{p}{q}\right) = [(p, q)]_{\approx}$$

je korektně definováno a je to bijekce mezi množinami $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$.

Konstrukce racionálních čísel - IV

Zkonstruujeme množinu $\mathbb{Q}$ tak, že ji položíme přímo rovnu faktorové množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$.