Homomorfismy grup

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole se budeme zabývat studiem vzájemných vztahů mezi grupami.

Abstrakt

V této kapitole se budeme zabývat studiem vzájemných vztahů mezi grupami.
K tomu účelu budeme používat zobrazení mezi těmito grupami, která budou ”přenášet strukturu grupy” - homomorfismus grup.

Abstrakt

V této kapitole se budeme zabývat studiem vzájemných vztahů mezi grupami.
K tomu účelu budeme používat zobrazení mezi těmito grupami, která budou ”přenášet strukturu grupy” - homomorfismus grup.
Ukážeme, že každou podgrupu lze vnořit do vhodné grupy permutací. Prozkoumáme vztah mezi počty prvků grupy a její podgrupy.

Obsah přednášky

- Homomorfismus grup. Podgrupa.
- Homomorfní obraz grupy.
- Vnoření. Izomorfismus grup.
- Cayleyho věta.

Obsah přednášky

- Homomorfismus grup. Podgrupa.
- Homomorfní obraz grupy.
- Vnoření. Izomorfismus grup.
- Cayleyho věta.
- Levé třídy podle podgrupy.
- Vlastnosti levých tříd.
- Řád grupy a index podgrupy, Lagrangeova věta.
- Stabilizátor a orbita

Homomorfismus grupy

Definice. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou dvě grupy a nechť $f : G \to H$ je zobrazení.

Homomorfismus grupy

Definice. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou dvě grupy a nechť $f : G \rightarrow H$ je zobrazení.

Řekneme, že f je **homomorfismus** grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$, je-li splněna podmínka

$$(\forall a, b \in G)(f(a \cdot b) = f(a) * f(b)).$$

Homomorfismus grupy

Definice. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou dvě grupy a nechť $f : G \to H$ je zobrazení.

Řekneme, že f je **homomorfismus** grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$, je-li splněna podmínka

$$(\forall a, b \in G)(f(a \cdot b) = f(a) * f(b)).$$

Je – li zobrazení f navíc injektivní, pak se nazývá **vnoření** , resp. je – li zobrazení f navíc bijektivní, pak se nazývá **izomorfismus** .

Příklady I

Příklad.

1. Nechť $(G, \cdot)$ je libovolná grupa. Pak identické zobrazení $id_G : G \longrightarrow G$ je vždy homomorfismus, který je navíc vždy izomorfismem.

Příklady II

2. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou dvě grupy, e neutrální prvek H . Potom zobrazení

$$f : G \longrightarrow H\,,\ \text{definované :}$$
$$f\,(x) = e\ \text{ pro každé } x \in G$$

je homomorfismus. Tento homomorfismus je vnořením, právě když množina G je jednoprvková, resp. je izomorfismem právě když obě množiny G, H jsou jednoprvkové.

Příklady III

3. Vezměme libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ a uvažme zobrazení $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ dané pro každé $a \in \mathbb{Z}$ předpisem $h(a) = [a]_n$.

Příklady III

3. Vezměme libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ a uvažme zobrazení $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ dané pro každé $a \in \mathbb{Z}$ předpisem $h(a) = [a]_n$.

   Pak zobrazení h je homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$, neboť pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ máme $[a + b]_n = [a]_n + [b]_n$.

Příklady III

3. Vezměme libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ a uvažme zobrazení $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ dané pro každé $a \in \mathbb{Z}$ předpisem $h(a) = [a]_n$.

   Pak zobrazení h je homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$, neboť pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ máme $[a+b]_n = [a]_n + [b]_n$.

   Tento surjektivní homomorfismus není vnoření a není izomorfismus.

Příklady IV

4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné číslo. Pro kterékoliv dvě permutace $\sigma, \tau \in S_n$ platí rovnost $\wp(\sigma \circ \tau) = \wp(\sigma)\cdot\wp(\tau)$.

Příklady IV

4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné číslo. Pro kterékoliv dvě permutace $\sigma, \tau \in S_n$ platí rovnost $\wp(\sigma \circ \tau) = \wp(\sigma) \cdot \wp(\tau)$.

   Tedy zobrazení $\wp : S_n \to \mathbb{Q} - \{0\}$ přiřazující každé permutaci $\sigma \in S_n$ její paritu $\wp(\sigma)$ je homomorfismus grupy $(S_n, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$.

Příklady IV

4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné číslo. Pro kterékoliv dvě permutace $\sigma, \tau \in S_n$ platí rovnost $\wp(\sigma \circ \tau) = \wp(\sigma)\cdot\wp(\tau)$.

   Tedy zobrazení $\wp : S_n \longrightarrow \mathbb{Q} - \{0\}$ přiřazující každé permutaci $\sigma \in S_n$ její paritu $\wp(\sigma)$ je homomorfismus grupy $(S_n, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$.

   Tento homomorfismus není vnoření (pro $n \geq 3$), není surjektivní a není izomorfismus.

Zachovávání operací a skládání

Tvrzení. Jsou-li $(G, \cdot)$, resp. $(H, *)$ grupy mající jednotkové prvky 1, resp. $\mathbb{1}$ a je-li $f : G \to H$ homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$, pak jsou rovněž splněny podmínky

$$f(1) = \mathbb{1} \quad \text{a} \quad (\forall a \in G)(f(a^{-1}) = f(a)^{-1}).$$

Zachovávání operací a skládání

Tvrzení. Jsou-li $(G, \cdot)$, resp. $(H, *)$ grupy mající jednotkové prvky 1, resp. $\mathbb{1}$ a je-li $f : G \to H$ homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$, pak jsou rovněž splněny podmínky

$$f(1) = \mathbb{1} \quad \text{a} \quad (\forall a \in G)(f(a^{-1}) = f(a)^{-1}).$$

Tvrzení. Nechť $(G, \cdot)$, $(H, *)$ a $(K, \bullet)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$, resp. $g : H \to K$ jsou homomorfismy grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$, resp. grupy $(H, *)$ do grupy $(K, \bullet)$. Pak složené zobrazení $g \circ f : G \to K$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(K, \bullet)$.

Podgrupy

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a nechť neprázdná podmnožina $H \subseteq G$ je uzavřená vzhledem k operaci $\cdot$ tak, že $(H, \cdot)$ je sama grupou.

Podgrupy

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a nechť neprázdná podmnožina $H \subseteq G$ je uzavřená vzhledem k operaci $\cdot$ tak, že $(H, \cdot)$ je sama grupou.

Potom $(H, \cdot)$ se nazývá **podgrupa grupy** $(G, \cdot)$.

Podgrupy

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a nechť neprázdná podmnožina $H \subseteq G$ je uzavřená vzhledem k operaci $\cdot$ tak, že $(H, \cdot)$ je sama grupou.

Potom $(H, \cdot)$ se nazývá **podgrupa grupy** $(G, \cdot)$.

Věta. Nechť $(H, \cdot)$ je podgrupa grupy $(G, \cdot)$. Pak

1. jednička podgrupy $(H, \cdot)$ je totožná s jedničkou grupy $(G, \cdot)$
2. inverzní prvek k prvku $h \in H$ v podgrupě $(H, \cdot)$ je totožný s inverzním prvkem k prvku h v grupě $(G, \cdot)$.

Příklady V

5. Grupa $(\mathbb{Z}_2, +)$ má dva prvky, totiž třídy $[0]_2$ a $[1]_2$. Množina čísel $\{-1, 1\}$ je zřejmě podgrupou grupy $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$.

Příklady V

5. Grupa $(\mathbb{Z}_2, +)$ má dva prvky, totiž třídy $[0]_2$ a $[1]_2$. Množina čísel $\{-1, 1\}$ je zřejmě podgrupou grupy $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$.

   Lze se přesvědčit, že zobrazení množiny $\mathbb{Z}_2$ na množinu $\{-1, 1\}$ přiřazující třídě $[0]_2$ číslo 1 a třídě $[1]_2$ číslo -1 je izomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_2, +)$ na grupu $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

Příklady VI

6. Zobrazení $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ přiřazující každému kladnému reálnému číslu x jeho přirozený logaritmus $\log(x)$ je bijekcí množiny $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel na množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Příklady VI

6. Zobrazení $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ přiřazující každému kladnému reálnému číslu x jeho přirozený logaritmus $\log(x)$ je bijekcí množiny $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel na množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

   $\log$ je izomorfismus grupy $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ na grupu $(\mathbb{R}, +)$, neboť pro libovolná kladná reálná čísla x, y platí $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$.

Homomorfní obraz grupy

Tvrzení. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$. Potom obraz $f(G) = \{f(a) \mid a \in G\}$ při tomto homomorfismu je podgrupa grupy $(H, *)$.

Homomorfní obraz grupy

Tvrzení. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$. Potom obraz $f(G) = \{f(a) \mid a \in G\}$ při tomto homomorfismu je podgrupa grupy $(H, *)$.

Tvrzení. Jsou-li $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ grupy a je-li $f : G \to H$ izomorfismus těchto grup, pak také inverzní zobrazení $f^{-1} \colon H \to G$ je izomorfismem těchto grup.

Shrnutí

Nechť znovu $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$.

Shrnutí

Nechť znovu $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$.

Obraz $f(G)$ při tomto homomorfismu je podgrupa grupy $(H, *)$ tj. $(f(G), *)$ je sama grupou.

Shrnutí

Nechť znovu $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$.

Obraz $f(G)$ při tomto homomorfismu je podgrupa grupy $(H, *)$ tj. $(f(G), *)$ je sama grupou.

Je-li navíc zobrazení f **prosté**, pak lze toto zobrazení chápat jako bijekci množiny G na množinu $f(G)$.

Shrnutí

Nechť znovu $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou grupy a nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grupy $(G, \cdot)$ do grupy $(H, *)$.

Obraz $f(G)$ při tomto homomorfismu je podgrupa grupy $(H, *)$ tj. $(f(G), *)$ je sama grupou.

Je-li navíc zobrazení f **prosté**, pak lze toto zobrazení chápat jako bijekci množiny G na množinu $f(G)$.

Jde tedy o izomorfismus grupy $(G, \cdot)$ na grupu $(f(G), *)$, jež je podgrupou grupy $(H, *)$.

Cayleyho věta

Věta. Každá grupa $(G, \cdot)$ je izomorfní některé podgrupě grupy permutací $(S(X), \circ)$ pro nějakou množinu X. Je-li uvedená grupa konečná, může být množina X také konečná.

Cayleyho věta

Věta. Každá grupa $(G, \cdot)$ je izomorfní některé podgrupě grupy permutací $(S(X), \circ)$ pro nějakou množinu X. Je-li uvedená grupa konečná, může být množina X také konečná.

Nástin důkazu: Pro $a \in G$ definujeme zobrazení $\lambda_a : G \to G$ jako $\lambda_a(g) = a \cdot g$ pro $g \in G$.

Cayleyho věta

Věta. Každá grupa $(G, \cdot)$ je izomorfní některé podgrupě grupy permutací $(S(X), \circ)$ pro nějakou množinu X. Je-li uvedená grupa konečná, může být množina X také konečná.

Nástin důkazu: Pro $a \in G$ definujeme zobrazení $\lambda_a : G \to G$ jako $\lambda_a(g) = a \cdot g$ pro $g \in G$. Zobrazení λ_a je permutace množiny G.

Cayleyho věta

Věta. Každá grupa $(G, \cdot)$ je izomorfní některé podgrupě grupy permutací $(S(X), \circ)$ pro nějakou množinu X. Je-li uvedená grupa konečná, může být množina X také konečná.

Nástin důkazu: Pro $a \in G$ definujeme zobrazení $\lambda_a : G \to G$ jako $\lambda_a(g) = a \cdot g$ pro $g \in G$. Zobrazení λ_a je permutace množiny G.

Zobrazení $$\Lambda : G \to S(G)$$

určené vztahem $\Lambda(a) = \lambda_a, a \in G$ je hledané vnoření.

Levé třídy podle podgrupy

Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pro libovolný prvek $a \in G$ uvažujme množinu

$$a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H\}.$$

Levé třídy podle podgrupy

Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pro libovolný prvek $a \in G$ uvažujme množinu

$$a{\cdot}H = \{a \cdot h \,|\, h \in H\}.$$

Tato množina $a{\cdot}H$ se nazývá **levá třída** grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H (určená prvkem a).

Levé třídy podle podgrupy

Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pro libovolný prvek $a \in G$ uvažujme množinu

$$a{\cdot}H = \{a \cdot h \mid h \in H\}.$$

Tato množina $a{\cdot}H$ se nazývá **levá třída** grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H (určená prvkem a).

Označme

$$G/H = \{a{\cdot}H \mid a \in G\}$$

množinu všech levých tříd grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H.

Vlastnosti levých tříd

Tvrzení. Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak pro libovolné prvky $a, b \in G$ platí:

$$a{\cdot}H = b{\cdot}H \iff b \in a{\cdot}H.$$

Vlastnosti levých tříd

Tvrzení. Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak pro libovolné prvky $a, b \in G$ platí:

$$a \cdot H = b \cdot H \iff b \in a \cdot H.$$

Důsledek. Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak množina G/H všech levých tříd grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H tvoří rozklad množiny G.

Vlastnosti levých tříd

Tvrzení. Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak pro libovolné prvky $a, b \in G$ platí:

$$a \cdot H = b \cdot H \iff b \in a \cdot H.$$

Důsledek. Buď $(G, \cdot)$ grupa a $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak množina G/H všech levých tříd grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H tvoří rozklad množiny G.

Poznámka. G/H se nazývá **levý rozklad** grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H. Jednou ze tříd rozkladu G/H je i podgrupa H sama, neboť $H = 1 \cdot H$.

Příklady VII

7. Uvažme grupu $(\mathbb{Z},+)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n{\cdot}\mathbb{Z} = \{n \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{Z},+)$.

Příklady VII

7. Uvažme grupu $(\mathbb{Z}, +)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n{\cdot}\mathbb{Z} = \{n \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

Zkoumejme nyní levý rozklad $\mathbb{Z}/n{\cdot}\mathbb{Z}$. Třídy tohoto rozkladu jsou množiny tvaru
$m + n{\cdot}\mathbb{Z} = \{m + n \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ pro libovolná $m \in \mathbb{Z}$.

Příklady VII

7. Uvažme grupu $(\mathbb{Z}, +)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n\cdot\mathbb{Z} = \{n \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

Zkoumejme nyní levý rozklad $\mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z}$. Třídy tohoto rozkladu jsou množiny tvaru $m + n\cdot\mathbb{Z} = \{m + n \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ pro libovolná $m \in \mathbb{Z}$.

Ale $\{m + n \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv m \pmod n\} = [m]_n$. Je tedy levý rozklad $\mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z}$ roven množině $\mathbb{Z}_n$ všech zbytkových tříd podle modulu n.

Příklady VIII

8. Buď $n \in \mathbb{N}$. Uvažme symetrickou grupu $(S_n, \circ)$ stupně n všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vzhledem ke skládání permutací, a její podgrupu A_n pozůstávající ze všech sudých permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Příklady VIII

8. Buď $n \in \mathbb{N}$. Uvažme symetrickou grupu $(S_n, \circ)$ stupně n všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vzhledem ke skládání permutací, a její podgrupu A_n pozůstávající ze všech sudých permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ platí, že $\sigma \circ A_n = A_n$ ($\sigma \circ A_n = S_n - A_n$) právě tehdy, když σ je sudá (lichá) permutace.

Příklady VIII

8. Buď $n \in \mathbb{N}$. Uvažme symetrickou grupu $(S_n, \circ)$ stupně n všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vzhledem ke skládání permutací, a její podgrupu A_n pozůstávající ze všech sudých permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pro libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ platí, že $\sigma \circ A_n = A_n$ ($\sigma \circ A_n = S_n - A_n$) právě tehdy, když σ je sudá (lichá) permutace.

Levý rozklad grupy $(S_n, \circ)$ podle podgrupy A_n má tvar $S_n / A_n = \{A_n, S_n - A_n\}$.

Konečné grupy

Buď $(G, \cdot)$ konečná grupa. Pak počet prvků množiny G se nazývá **řád** grupy $(G, \cdot)$ a značí se $|G|$.

Konečné grupy

Buď $(G, \cdot)$ konečná grupa. Pak počet prvků množiny G se nazývá **řád** grupy $(G, \cdot)$ a značí se $|G|$.

Buď $H \subseteq G$ podgrupa grupy $(G, \cdot)$. Pak také $(H, \cdot)$ je konečná grupa a její řád je $|H|$.

Konečné grupy

Buď $(G, \cdot)$ konečná grupa. Pak počet prvků množiny G se nazývá **řád** grupy $(G, \cdot)$ a značí se $|G|$.

Buď $H \subseteq G$ podgrupa grupy $(G, \cdot)$. Pak také $(H, \cdot)$ je konečná grupa a její řád je $|H|$.

Existuje jen konečný počet levých tříd grupy $(G, \cdot)$ podle podgrupy H. Tento počet se nazývá **index** podgrupy H v grupě $(G, \cdot)$ a značí se $|G/H|$.

Vztah řádů grupy a podgrupy

Tvrzení. Buď $(G, \cdot)$ konečná grupa a buď $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak platí $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Vztah řádů grupy a podgrupy

Tvrzení. Buď $(G, \cdot)$ konečná grupa a buď $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak platí $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek. (Lagrangeova věta) Řád každé podgrupy konečné grupy $(G, \cdot)$ je dělitelem řádu grupy $(G, \cdot)$.

Vztah řádů grupy a podgrupy

Tvrzení. Buď $(G, \cdot)$ konečná grupa a buď $H \subseteq G$ její podgrupa. Pak platí $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek. (Lagrangeova věta) Řád každé podgrupy konečné grupy $(G, \cdot)$ je dělitelem řádu grupy $(G, \cdot)$.

Podle Cayleyho věty je každá grupa $(G, \cdot)$ izomorfní některé podgrupě grupy permutací $(S(X), \circ)$ vhodné množiny X.

Stabilizátor a orbita

Buď X neprázdná množina a buď $G \subseteq S(X)$ libovolná podgrupa grupy permutací $(S(X), \circ)$. Pak $(G, \circ)$ je grupa, jejímiž prvky jsou některé permutace množiny X.

Stabilizátor a orbita

Buď X neprázdná množina a buď $G \subseteq S(X)$ libovolná podgrupa grupy permutací $(S(X), \circ)$. Pak $(G, \circ)$ je grupa, jejímiž prvky jsou některé permutace množiny X.

Pro libovolný prvek $x \in X$ uvažme množinu permutací

$$G_x = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x\},$$

kterou nazýváme **stabilizátor** prvku x v grupě $(G, \circ)$,

Stabilizátor a orbita

Buď X neprázdná množina a buď $G \subseteq S(X)$ libovolná podgrupa grupy permutací $(S(X), \circ)$. Pak $(G, \circ)$ je grupa, jejímiž prvky jsou některé permutace množiny X.

Pro libovolný prvek $x \in X$ uvažme množinu permutací

$$G_x = \{\sigma \in G \,|\, \sigma(x) = x\},$$

kterou nazýváme **stabilizátor** prvku x v grupě $(G, \circ)$, a množinu prvků z X

$$G(x) = \{\sigma(x) \,|\, \sigma \in G\},$$

kterou nazýváme **orbita** prvku x vzhledem ke grupě $(G, \circ)$.

Vlastnosti stabilizátoru a orbity

Tvrzení. Buď $G \subseteq S(X)$ podgrupa grupy $(S(X), \circ)$. Pak stabilizátor G_x každého prvku $x \in X$ je podgrupou grupy $(G, \circ)$.

Vlastnosti stabilizátoru a orbity

Tvrzení. Buď $G \subseteq S(X)$ podgrupa grupy $(S(X), \circ)$. Pak stabilizátor G_x každého prvku $x \in X$ je podgrupou grupy $(G, \circ)$.

Tvrzení. Buď $G \subseteq S(X)$ podgrupa grupy $(S(X), \circ)$. Pak množina $\{G(x) \mid x \in X\}$ všech orbit prvků množiny X vzhledem ke grupě $(G, \circ)$ tvoří rozklad množiny X.

Vlastnosti stabilizátoru a orbity

Tvrzení. Buď $G \subseteq S(X)$ podgrupa grupy $(S(X), \circ)$. Pak stabilizátor G_x každého prvku $x \in X$ je podgrupou grupy $(G, \circ)$.

Tvrzení. Buď $G \subseteq S(X)$ podgrupa grupy $(S(X), \circ)$. Pak množina $\{G(x) \mid x \in X\}$ všech orbit prvků množiny X vzhledem ke grupě $(G, \circ)$ tvoří rozklad množiny X.

Tvrzení. Buď X konečná množina. Buď dále $G \subseteq S(X)$ podgrupa konečné grupy $(S(X), \circ)$. Pak pro počet prvků $|G(x)|$ orbity $G(x)$ kteréhokoliv prvku $x \in X$ vzhledem ke grupě $(G, \circ)$ platí, že $|G(x)| = |G/G_x|$.