Variace a kombinace

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

Abstrakt

V této kapitole shrneme základní poznatky z kombinatoriky. Budeme podrobněji studovat kombinatorické funkce –

Abstrakt

V této kapitole shrneme základní poznatky z kombinatoriky. Budeme podrobněji studovat kombinatorické funkce – **faktoriál, kombinační číslo**.

Zmíníme se krátce o permutacích, variacích a kombinacích k-té třídy v n-prvkové množině.

Abstrakt

V této kapitole shrneme základní poznatky z kombinatoriky. Budeme podrobněji studovat kombinatorické funkce – **faktoriál, kombinační číslo**.
Zmíníme se krátce o permutacích, variacích a kombinacích k-té třídy v n-prvkové množině.
Přednášku ukončíme principem inkluze a exkluze.

Obsah přednášky

- Faktoriál a kombinační číslo.
- Binomická věta.
- Polynomický koeficient.

Obsah přednášky

- Faktoriál a kombinační číslo.
- Binomická věta.
- Polynomický koeficient.

- Variace k-té třídy v n-prvkové množině.
- Kombinace k-té třídy v n-prvkové množině.
- Permutace.
- Princip inkluze a exkluze.

Faktoriál

Výchozí kombinatorickou funkcí je **faktoriál**, který je pro každé číslo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definován předpisem:

Faktoriál

Výchozí kombinatorickou funkcí je **faktoriál**, který je pro každé číslo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definován předpisem:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Příklad faktoriálu

Faktoriál přirozených čísel se velmi rychle zvětšuje:

Příklad faktoriálu

Faktoriál přirozených čísel se velmi rychle zvětšuje:

$$0! = 1,$$

Příklad faktoriálu

Faktoriál přirozených čísel se velmi rychle zvětšuje:

$$0! = 1,$$

$$1! = 1, 2! = 2$$

Příklad faktoriálu

Faktoriál přirozených čísel se velmi rychle zvětšuje:

$$0! = 1,$$

$$1! = 1, 2! = 2$$

$$3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$$

Příklad faktoriálu

Faktoriál přirozených čísel se velmi rychle zvětšuje:

$$0! = 1,$$

$$1! = 1, 2! = 2$$

$$3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$$

$$6! = 720, 7! = 5040, 8! = 40320.$$

Binomický koeficient

Další základní kombinatorickou funkcí je **binomický koeficient**, nebo též **kombinační číslo**, definované pro každá dvě čísla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $k \leq n$ předpisem:

Binomický koeficient

Další základní kombinatorickou funkcí je **binomický koeficient**, nebo též **kombinační číslo**, definované pro každá dvě čísla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $k \leq n$ předpisem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \, .$$

Jednoduché vlastnosti

Jednoduché vlastnosti

Pro libovolná $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $k \leq n$ platí

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{a} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Jednoduché vlastnosti

Pro libovolná $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $k \leq n$ platí

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{a} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tvrzení. Pro libovolná $n, k \in \mathbb{N}$ splňující $k < n$ platí

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Pascalův trojúhelník

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Binomická věta

Věta. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Binomická věta

Věta. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Důsledky. Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Polynomický koeficient

Pro libovolná $\ell \in \mathbb{N}$ a $n, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$ je **polynomický koeficient** definován předpisem:

Polynomický koeficient

Pro libovolná $\ell \in \mathbb{N}$ a $n, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$ je **polynomický koeficient** definován předpisem:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ \ldots \ \cdot k_\ell!} \, .$$

Rekurentní formule

Tvrzení. Pro libovolná $\ell \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ a $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$ platí

Rekurentní formule

Tvrzení. Pro libovolná $\ell \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ a $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$ platí

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \sum \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \ldots, k_\ell}$$

kde suma je přes všechna $j = 1, \ldots, \ell$ taková, že $k_j \in \mathbb{N}$.

Aplikace rekurentní formule I

Věta. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$, libovolná $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

Aplikace rekurentní formule I

Věta. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$, libovolná $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x_1 + \cdots + x_\ell)^n = \sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} x_1^{k_1} \ldots x_\ell^{k_\ell},$$

Aplikace rekurentní formule I

Věta. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$, libovolná $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x_1 + \cdots + x_\ell)^n = \sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} x_1^{k_1} \ldots x_\ell^{k_\ell},$$

kde suma je přes všechny uspořádané ℓ-tice $(k_1, \ldots, k_\ell)$ čísel z $\mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$.

Aplikace rekurentní formule II

Důsledek. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$ a libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

Aplikace rekurentní formule II

Důsledek. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$ a libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \ell^n,$$

kde suma je přes všechny uspořádané ℓ-tice $(k_1, \ldots, k_\ell)$ čísel z $\mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$.

Variace k-té třídy I

Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina. Pak **variace k-té třídy** v množině S jsou libovolné uspořádané k-tice

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

vzájemně různých prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$.

Variace k-té třídy I

Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina. Pak **variace k-té třídy** v množině S jsou libovolné uspořádané k-tice

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

vzájemně různých prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$. Takovou uspořádanou k-tici můžeme vnímat také jako prosté zobrazení množiny $\{1, \ldots, k\}$ do množiny S, které každému číslu $i \in \{1, \ldots, k\}$ přiřazuje prvek $a_i \in S$.

Variace k-té třídy II

Takové zobrazení je možno přehledně zapsat například ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}.$$

Variace k-té třídy II

Takové zobrazení je možno přehledně zapsat například ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}.$$

Tato zobrazení je ovšem možno uvažovat i pro $k = 0$, v tom případě se jedná o jediné, totiž prázdné zobrazení, a v takovém případě je možno připustit i $n = 0$, tedy prázdnou množinu S.

Počet variací k-té třídy

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S je roven číslu $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Počet variací k-té třídy

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S je roven číslu $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak variace n-té třídy v n-prvkové množině S se nazývají **permutace** množiny S.

Počet variací k-té třídy

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S je roven číslu $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak variace n-té třídy v n-prvkové množině S se nazývají **permutace** množiny S.

Důsledek. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech permutací n-prvkové množiny S je roven číslu $n!$.

Variace k-té třídy s opakováním

Nechť dále $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $k \in \mathbb{N}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina.

Variace k-té třídy s opakováním

Nechť dále $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $k \in \mathbb{N}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina.

Uvažujeme-li nyní zcela libovolné uspořádané k-tice prvků množiny S, tedy libovolné prvky kartézské mocniny S^k, dostáváme **variace k-té třídy** v množině S **s opakováním**.

Variace k-té třídy s opakováním

Nechť dále $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $k \in \mathbb{N}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina.

Uvažujeme-li nyní zcela libovolné uspořádané k-tice prvků množiny S, tedy libovolné prvky kartézské mocniny S^k, dostáváme **variace k-té třídy** v množině S **s opakováním**.

Takové uspořádané k-tice lze ovšem chápat jako zobrazení množiny $\{1, \ldots, k\}$ do množiny S (pro $k = 0$ jde o jediné a to prázdné zobrazení).

Počet variací s opakováním

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S s opakováním je roven číslu n^k.

Počet variací s opakováním

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S s opakováním je roven číslu n^k.

Poznámka. Aby toto tvrzení platilo i pro $n = k = 0$, je třeba klást $0^0 = 1$.

Počet variací s opakováním

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S s opakováním je roven číslu n^k.

Poznámka. Aby toto tvrzení platilo i pro $n = k = 0$, je třeba klást $0^0 = 1$.

Kombinace k-té třídy

Nechť nyní $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina.

Kombinace k-té třídy

Nechť nyní $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina.

Pak **kombinace k-té třídy** v množině S jsou libovolné k-prvkové podmnožiny $T \subseteq S$.

Kombinace k-té třídy

Nechť nyní $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina.

Pak **kombinace k-té třídy** v množině S jsou libovolné k-prvkové podmnožiny $T \subseteq S$.

Tyto k-prvkové podmnožiny lze jednoznačně popsat pomocí jejich tzv. **charakteristických zobrazení**.

Charakteristické zobrazení

Charakteristické zobrazení množiny T je zobrazení $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ splňující podmínku $f(s) = 1$ právě tehdy, když $s \in T$.

Charakteristické zobrazení

Charakteristické zobrazení množiny T je zobrazení $f : S \to \{0, 1\}$ splňující podmínku $f(s) = 1$ právě tehdy, když $s \in T$.

Tedy T je k-prvková právě tehdy, když $\sum_{a \in S} f(a) = k$.

Charakteristické zobrazení

Charakteristické zobrazení množiny T je zobrazení $f : S \to \{0, 1\}$ splňující podmínku $f(s) = 1$ právě tehdy, když $s \in T$.

Tedy T je k-prvková právě tehdy, když $\sum_{a \in S} f(a) = k$.

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Pak počet všech kombinací k-té třídy v n-prvkové množině S je roven číslu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} .$$

Kombinace s opakováním I

Nechť dále $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina.

Kombinace s opakováním I

Nechť dále $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina.

Definujeme nyní **kombinace k-té třídy v množině S s opakováním** jakožto libovolná zobrazení $g : S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující podmínku

$$\sum_{a \in S} g(a) = k.$$

Kombinace s opakováním I

Nechť dále $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina.

Definujeme nyní **kombinace k-té třídy v množině S s opakováním** jakožto libovolná zobrazení $g : S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující podmínku

$$\sum_{a \in S} g(a) = k.$$

Hledáme tedy počet řešení rovnice

$$a_1 + \cdots + a_n = k, a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Kombinace s opakováním II

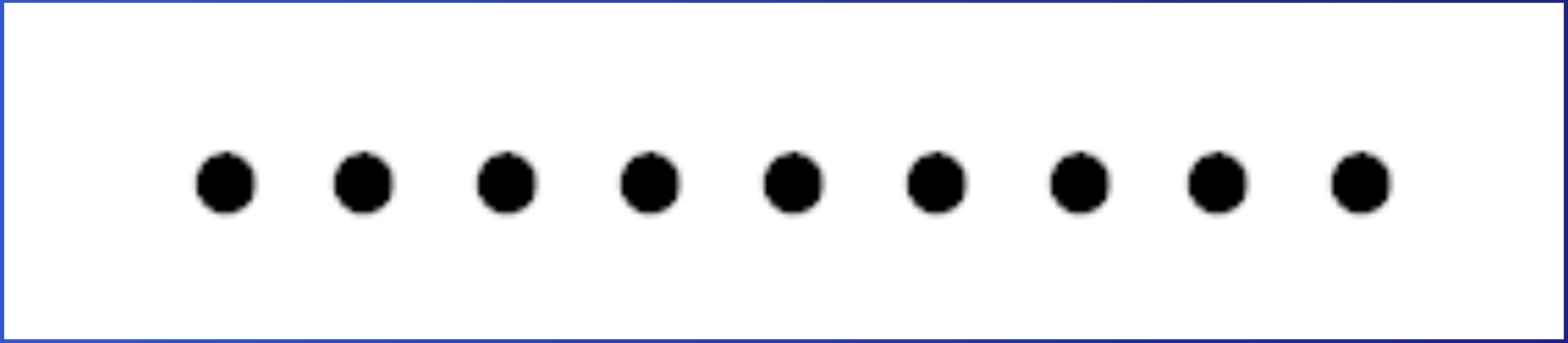
Máme tedy obecný popis souboru k prvků vybraných z množiny S, v němž se některé prvky mohou vyskytovat opakovaně. Zmíněný popis spočívá v tom, že pro každý prvek $a \in S$ udává číslo $g(a)$ počet výskytů prvku a v daném souboru, tedy v dané kombinaci s opakováním.

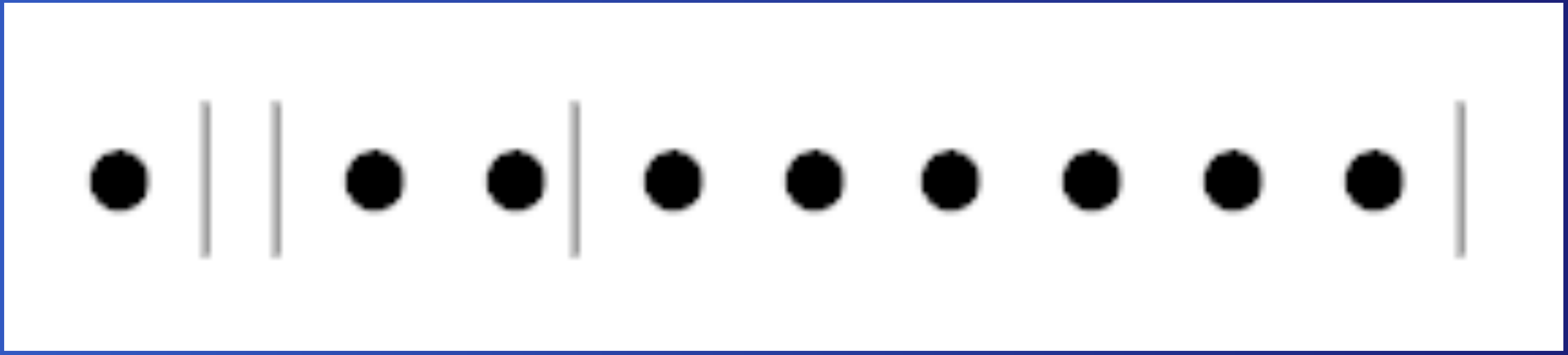
Kombinace s opakováním II

Máme tedy obecný popis souboru k prvků vybraných z množiny S, v němž se některé prvky mohou vyskytovat opakovaně. Zmíněný popis spočívá v tom, že pro každý prvek $a \in S$ udává číslo $g(a)$ počet výskytů prvku a v daném souboru, tedy v dané kombinaci s opakováním.

Tvrzení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech kombinací k-té třídy v n-prvkové množině S s opakováním je roven číslu $\binom{n+k-1}{k}$.

Kombinace s opakováním III





Permutace s opakováním I

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\ell \in \mathbb{N}$ a nechť U je ℓ-prvková množina. Vypišme ji ve tvaru $U = \{b_1, b_2, \ldots, b_\ell\}$.

Permutace s opakováním I

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\ell \in \mathbb{N}$ a nechť U je ℓ-prvková množina. Vypišme ji ve tvaru $U = \{b_1, b_2, \ldots, b_\ell\}$.

Uvažme libovolnou kombinaci n-té třídy v množině U s opakováním chápanou jako soubor n prvků vybraných z množiny U, v němž se některé prvky vyskytují opakovaně. Nechť k_1 je počet výskytů prvku b_1, nechť k_2 je počet výskytů prvku b_2, atd., až k_ℓ je počet výskytů prvku b_ℓ v tomto souboru. Pak tedy platí $k_1 + \cdots + k_\ell = n$.

Permutace s opakováním II

Kolika navzájem odlišitelnými způsoby lze takový soubor vypsat ve tvaru posloupnosti prvků?

Permutace s opakováním II

Kolika navzájem odlišitelnými způsoby lze takový soubor vypsat ve tvaru posloupnosti prvků?

Takovým posloupnostem se pak říká **permutace s opakováním**.

Permutace s opakováním II

Kolika navzájem odlišitelnými způsoby lze takový soubor vypsat ve tvaru posloupnosti prvků?

Takovým posloupnostem se pak říká **permutace s opakováním**.

Lze je zapisovat jako uspořádané n-tice prvků z U, v nichž se prvek b_1 objevuje k_1-krát, prvek b_2 se objevuje k_2-krát, atd., až prvek b_ℓ se objevuje k_ℓ-krát.

Počet permutací s opakováním

Tvrzení. Nechť $\ell \in \mathbb{N}$, nechť $U = \{b_1, \dots, b_\ell\}$ je ℓ-prvková množina a nechť $n, k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k_1 + \cdots + k_\ell = n$.

Počet permutací s opakováním

Tvrzení. Nechť $\ell \in \mathbb{N}$, nechť $U = \{b_1, \ldots, b_\ell\}$ je ℓ-prvková množina a nechť $n, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k_1 + \cdots + k_\ell = n$.

Pak počet příslušných permutací s opakováním v množině U je roven číslu

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ \ldots \ \cdot k_\ell!}.$$

Princip inkluze a exkluze I

Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí.

Princip inkluze a exkluze I

Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí.

Problém, který zkoumáme, spočívá v tom, jak určit, kolik je objektů nemajících žádnou z uvedených vlastností.

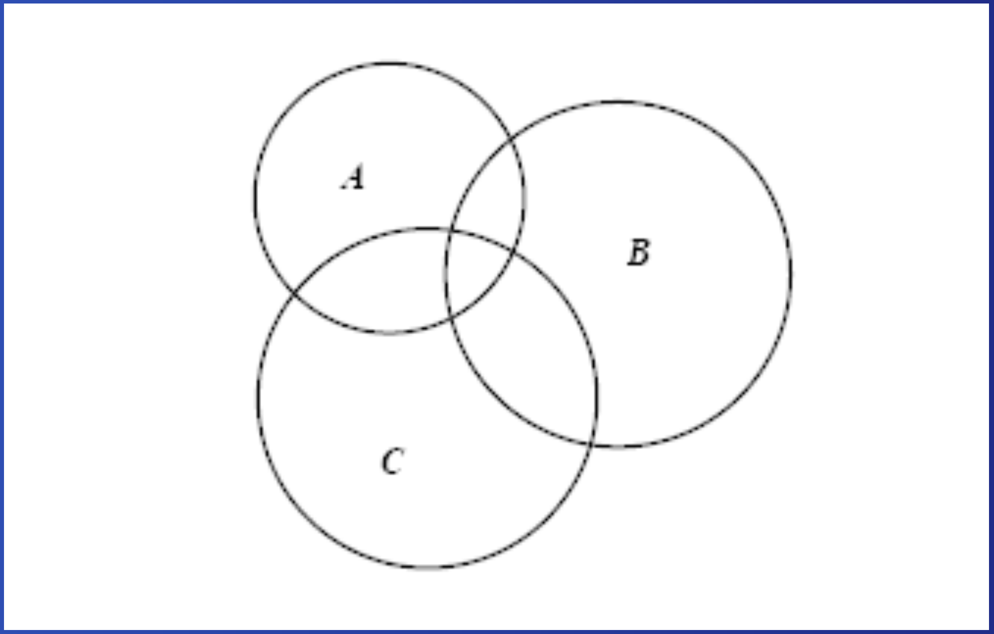
Princip inkluze a exkluze I

Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí.

Problém, který zkoumáme, spočívá v tom, jak určit, kolik je objektů nemajících žádnou z uvedených vlastností.

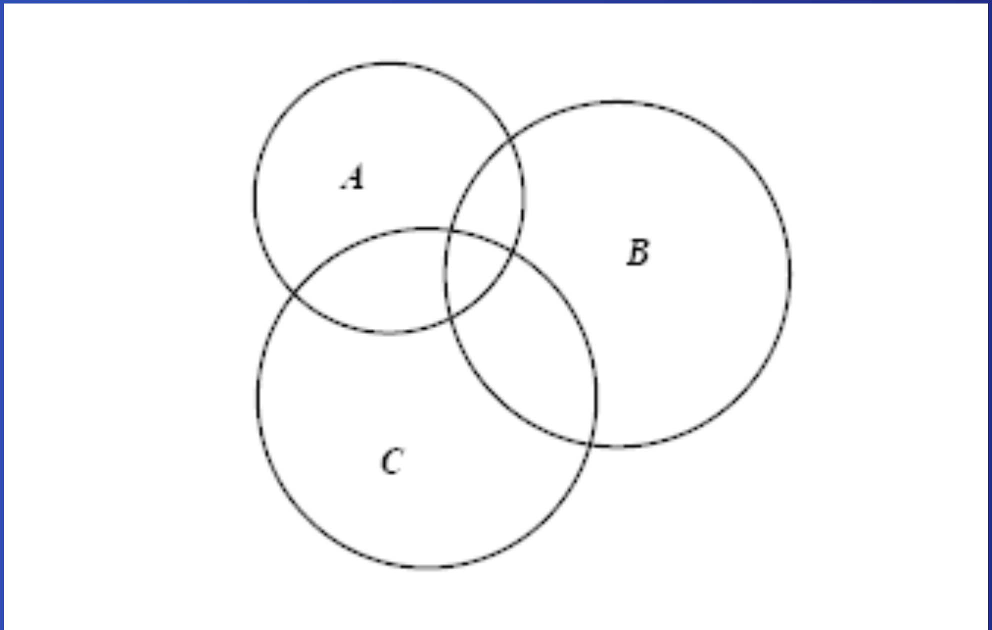
Jestliže pro každé $i \in I$ označíme A_i množinu všech těch objektů z Q, které mají vlastnost s indexem i, pak jde o to, jak zjistit, kolik prvků má množina $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$.

Vennův diagram



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Vennův diagram



$$|Q| - |A \cup B \cup C| = |Q| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Princip inkluze a exkluze II

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$.

Princip inkluze a exkluze II

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$. Potom pro množinu $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$ platí

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Princip inkluze a exkluze II

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$. Potom pro množinu $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$ platí

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Poznámka. Poněvadž $A_i \subseteq Q$ pro $i \in I$, klademe $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = Q$.

Princip inkluze a exkluze III

Vztah dokázaný v předchozí větě lze přepsat na

Princip inkluze a exkluze III

Vztah dokázaný v předchozí větě lze přepsat na

$$\left|Q - \bigcup_{i\in I} A_i\right| = |Q| - \sum_{i\in I} |A_i| + \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq I\\ i\neq j}} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{\substack{\{i,j,k\}\subseteq I\\ i\neq j\neq k\neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{|I|} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Princip inkluze a exkluze III

Vztah dokázaný v předchozí větě lze přepsat na

$$\left|Q - \bigcup_{i \in I} A_i\right| = |Q| - \sum_{i \in I} |A_i| + \sum_{\substack{\{i,j\} \subseteq I \\ i \neq j}} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{\substack{\{i,j,k\} \subseteq I \\ i \neq j \neq k \neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{|I|} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Tento vztah kvůli střídání znamének bývá právě označován termínem **princip inkluze a exkluze**.

Princip inkluze a exkluze - příklady

Příklad IE1. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g : S \to U$.

Princip inkluze a exkluze - příklady

Příklad IE1. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g : S \to U$.

Řešení.

$$|A(0)| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k-j)^n.$$

Princip inkluze a exkluze - příklady

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, platí-li, že $\sigma(i) = i$.

Princip inkluze a exkluze - příklady

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, platí-li, že $\sigma(i) = i$.

Určete, kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které nemají ani jeden pevný bod.

Princip inkluze a exkluze - příklady

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, platí-li, že $\sigma(i) = i$.

Určete, kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které nemají ani jeden pevný bod.

Řešení.

$$|A(0)| = n! \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{\ell!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)}_{\to \frac{1}{e} \text{ pro } n \to \infty}.$$