Permutace

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

Abstrakt

V této kapitole se zaměříme na permutace konečných množin –

Abstrakt

V této kapitole se zaměříme na permutace konečných množin – **zavedeme pojmy cyklus, transpozice, parita, inverze, sudá a lichá permutace**.
Ukážeme bijekci mezi sudými a lichými permutacemi.

Obsah přednášky

- Permitace.
- Cyklus.
- Transpozice.

Obsah přednášky

- Permitace.
- Cyklus.
- Transpozice.
- Inverze.
- Parita.
- Sudá a lichá permutace.

Permutace

Připomeňme, že pro libovolnou množinu X jsme symbolem X^X označili množinu všech zobrazení $f: X \to X$ a symbolem $\circ$ jsme označili skládání zobrazení.

Permutace

Připomeňme, že pro libovolnou množinu X jsme symbolem X^X označili množinu všech zobrazení $f : X \to X$ a symbolem $\circ$ jsme označili skládání zobrazení.

Uvažujme dále libovolné bijekce $f : X \to X$. Takovým bijekcím říkáme **permutace** množiny X.

Množinu všech permutací množiny X značíme $S(X)$. Je to podmnožina v množině X^X a je uzavřená vzhledem ke skládání zobrazení.

Permutace

Připomeňme, že pro libovolnou množinu X jsme symbolem X^X označili množinu všech zobrazení $f : X \to X$ a symbolem $\circ$ jsme označili skládání zobrazení.

Uvažujme dále libovolné bijekce $f : X \to X$. Takovým bijekcím říkáme **permutace** množiny X.

Množinu všech permutací množiny X značíme $S(X)$. Je to podmnožina v množině X^X a je uzavřená vzhledem ke skládání zobrazení.

Permutace konečných množin I

Budeme kvůli přehlednosti pracovat pouze s množinami tvaru $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je přirozené číslo. Pak místo $S(X)$ budeme psát S_n.

Permutace konečných množin I

Budeme kvůli přehlednosti pracovat pouze s množinami tvaru $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je přirozené číslo. Pak místo $S(X)$ budeme psát S_n.

Permutace $\sigma \in S_n$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

kde pro každé $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $i_r = \sigma(r)$.

Permutace konečných množin II

$$\boxed{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}}$$

Permutace konečných množin II

$$\boxed{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}}$$

Všimněme si, že pak $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ je obecně libovolná uspořádaná n-tice vzájemně různých prvků množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, takže jde vlastně o prvky $1, 2, \dots, n$ zapsané v nějakém obecném pořadí.

Permutace a kombinatorika

Permutace $\sigma \in S_n$ tedy vzájemně jednoznačně odpovídají permutacím $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ prvků $1, 2, \ldots, n$ tak, jak byly zavedeny v kombinatorice.

Permutace a kombinatorika

Permutace $\sigma \in S_n$ tedy vzájemně jednoznačně odpovídají permutacím $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ prvků $1, 2, \ldots, n$ tak, jak byly zavedeny v kombinatorice.

Odtud plyne, že existuje celkem $\boxed{n!}$ permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Permutace a kombinatorika

Permutace $\sigma \in S_n$ tedy vzájemně jednoznačně odpovídají permutacím $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ prvků $1, 2, \ldots, n$ tak, jak byly zavedeny v kombinatorice.

Odtud plyne, že existuje celkem $\boxed{n!}$ permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Kvůli odlišení budeme uspořádaným n-ticím $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ vzájemně různých prvků množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ říkat **pořadí** prvků $1, 2, \ldots, n$.

Samodružný prvek permutace

Prvek $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se nazývá **samodružným prvkem (pevným bodem)** permutace $\sigma \in S_n$, jestliže $\sigma(r) = r$.

Samodružný prvek permutace

Prvek $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se nazývá **samodružným prvkem** (**pevným bodem**) permutace $\sigma \in S_n$, jestliže $\sigma(r) = r$.

Připomeňme si, že pomocí principu inkluze a exkluze lze počet permutací, které nemají žádný pevný bod vyjádřit výrazem

Samodružný prvek permutace

Prvek $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se nazývá **samodružným prvkem (pevným bodem)** permutace $\sigma \in S_n$, jestliže $\sigma(r) = r$.

Připomeňme si, že pomocí principu inkluze a exkluze lze počet permutací, které nemají žádný pevný bod vyjádřit výrazem

$$n! \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \quad \rightarrow \frac{n!}{e}.$$

Cykly I

Nechť $\ell > 1$ je přirozené číslo a nechť $\sigma \in S_n$ je permutace.

Cykly I

Nechť $\ell > 1$ je přirozené číslo a nechť $\sigma \in S_n$ je permutace.

Tato permutace σ se nazývá **cyklus** délky ℓ, existují-li vzájemně různé prvky $j_1, j_2, \ldots, j_\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že platí

$$\sigma(j_1) = j_2, \sigma(j_2) = j_3, \ldots, \sigma(j_{\ell-1}) = j_\ell, \sigma(j_\ell) = j_1$$

a $\boxed{\sigma(r) = r}$ pro $r \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$.

Cykly II

Cyklus σ pak zapisujeme jednodušeji ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_\ell \end{pmatrix}.$$

Cykly II

Cyklus σ pak zapisujeme jednodušeji ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_\ell \end{pmatrix}.$$

Dva cykly $\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_\ell \end{pmatrix}$ a $\tau = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}$ z S_n se nazývají **nezávislé**, jestliže $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} \cap \{k_1, k_2, \dots, k_m\} = \emptyset$.

Cykly II

Cyklus σ pak zapisujeme jednodušeji ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_\ell \end{pmatrix}.$$

Dva cykly $\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_\ell \end{pmatrix}$ a $\tau = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}$ z S_n se nazývají **nezávislé**, jestliže $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} \cap \{k_1, k_2, \dots, k_m\} = \emptyset$.

Cykly $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ jsou vzájemně nezávislé, jestliže jsou nezávislé cykly σ_p, σ_q pro všechna $p, q \in \{1, 2, \dots, t\}, p \neq q$.

Cykly III

Nezávislé cykly σ, τ spolu při skládání komutují tj. platí

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

Cykly III

Nezávislé cykly σ, τ spolu při skládání komutují tj. platí

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

Věta. Každou neidentickou permutaci $\sigma \in S_n$ lze vyjádřit ve tvaru součinu několika navzájem nezávislých cyklů. Toto vyjadření je jediné až na pořadí zmíněných cyklů.

Transpozice

Cyklus délky 2, to znamená cyklus tvaru $\sigma = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, se nazývá **transpozice**.

Transpozice

Cyklus délky 2, to znamená cyklus tvaru $\sigma = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, se nazývá **transpozice**.

Věta. Nechť $n > 1$. Pak každou permutaci $\sigma \in S_n$ lze vyjádřit ve tvaru součinu několika transpozic.

Inverze

Nechť $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je libovolné pořadí prvků $1, 2, \ldots, n$.

Inverze

Nechť $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je libovolné pořadí prvků $1, 2, \ldots, n$.

Jsou-li $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové prvky, že $s < t$ a $i_s > i_t$, pak říkáme, že prvky i_s, i_t tvoří **inverzi** v pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Inverze

Nechť $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je libovolné pořadí prvků $1, 2, \ldots, n$.

Jsou-li $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové prvky, že $s < t$ a $i_s > i_t$, pak říkáme, že prvky i_s, i_t tvoří **inverzi** v pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Parita

Pro libovolnou permutaci

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

z S_n definujeme její **paritu** $\wp(\sigma)$ předpisem

Parita

Pro libovolnou permutaci

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

z S_n definujeme její **paritu** $\wp(\sigma)$ předpisem

$$\wp(\sigma) = (-1)^{In(i_1, i_2, \dots, i_n)},$$

Parita

Pro libovolnou permutaci

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

z S_n definujeme její **paritu** $\wp(\sigma)$ předpisem

$$\wp(\sigma) = (-1)^{In(i_1, i_2, \dots, i_n)},$$

kde $In(i_1, i_2, \dots, i_n)$ je celkový počet všech inverzí v pořadí $(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Sudá a lichá permutace

Říkáme, že permutace σ je **sudá**, je-li $\wp(\sigma) = 1$, to znamená obsahuje-li pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ sudý počet inverzí.

Sudá a lichá permutace

Říkáme, že permutace σ je **sudá**, je-li $\wp(\sigma) = 1$, to znamená obsahuje-li pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ sudý počet inverzí.

Říkáme, že permutace σ je **lichá**, je-li $\wp(\sigma) = -1$, to znamená obsahuje-li pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ lichý počet inverzí.

Sudá a lichá permutace

Říkáme, že permutace σ je **sudá**, je-li $\wp(\sigma) = 1$, to znamená obsahuje-li pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ sudý počet inverzí.

Říkáme, že permutace σ je **lichá**, je-li $\wp(\sigma) = -1$, to znamená obsahuje-li pořadí $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ lichý počet inverzí.

Věta. Permutace $\sigma \in S_n$ je sudá, resp. lichá, právě když každé vyjádření σ ve tvaru součinu transpozic obsahuje sudý, resp. lichý počet transpozic.

Parita součinu permutací

Důsledek. Pro libovolné permutace $\sigma, \tau, \rho \in S_n$ platí

$$\wp(\sigma \circ \tau) = \wp(\sigma) \cdot \wp(\tau), \quad \wp(\rho^{-1}) = \wp(\rho).$$

Příklady inverzí I

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. σ nemá žádné inverze, je tedy σ sudá permutace a $\wp(\sigma) = 1$.

Příklady inverzí I

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. σ nemá žádné inverze, je tedy σ sudá permutace a $\wp(\sigma) = 1$.
- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. σ má jednu inverzi (čísla 3 a 2 tvoří inverzi), je tedy σ lichá permutace a $\wp(\sigma) = -1$.

Příklady inverzí II

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. σ má jednu inverzi (čísla 2 a 1 tvoří inverzi, 3 a 1 tvoří inverzi), je tedy σ sudá permutace a $\wp(\sigma) = 1$.

Příklady inverzí II

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. σ má jednu inverzi (čísla 2 a 1 tvoří inverzi, 3 a 1 tvoří inverzi), je tedy σ sudá permutace a $\wp(\sigma) = 1$.
- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. σ má dvě inverzie (čísla 3 a 1 tvoří inverzi, čísla 3 a 2 tvoří inverzi), je tedy σ sudá permutace a $\wp(\sigma) = 1$.

Množina sudých permutací

Buď n přirozené číslo. Označme A_n množinu všech sudých permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vezměme dále libovolnou lichou permutaci $\vartheta \in S_n - A_n$.

Množina sudých permutací

Buď n přirozené číslo. Označme A_n množinu všech sudých permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vezměme dále libovolnou lichou permutaci $\vartheta \in S_n - A_n$. Je možno uvažovat zobrazení

$$\gamma \; : \; A_n \; \longrightarrow \; S_n - A_n$$

definované pro každou sudou permutaci $\sigma \in A_n$ předpisem

$$\gamma(\sigma) = \sigma \circ \vartheta.$$

Zobrazení γ

Zobrazení γ převádí vzájemně jednoznačně všechny sudé permutace na liché permutace.

Zobrazení γ

Zobrazení γ převádí vzájemně jednoznačně všechny sudé permutace na liché permutace.

Inverzním zobrazením k γ je zobrazení

$$\delta \;:\; S_n - A_n \;\rightarrow\; A_n$$

definované pro každou lichou permutaci $\tau \in S_n - A_n$ předpisem

$$\delta(\tau) = \tau \circ \vartheta^{-1}.$$

Zobrazení γ

Zobrazení γ převádí vzájemně jednoznačně všechny sudé permutace na liché permutace.

Inverzním zobrazením k γ je zobrazení

$$\delta \; : \; S_n - A_n \; \rightarrow \; A_n$$

definované pro každou lichou permutaci $\tau \in S_n - A_n$ předpisem

$$\delta(\tau) = \tau \circ \vartheta^{-1}.$$

Tedy $\delta \circ \gamma$ je identita na A_n a $\gamma \circ \delta$ je identita na $S_n - A_n$, $|A_n| = |S_n - A_n| = \frac{n!}{2}$.