Svazy

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

Zmíníme se krátce o úplných a distributivních svazech, resp. jaké vlastnosti má řetězec reálných čísel.

Abstrakt

V této kapitole budeme podrobněji studovat speciální uspořádané množiny – Zmíníme se krátce o úplných a distributivních svazech, resp. jaké vlastnosti má řetězec reálných čísel.

Abstrakt

V této kapitole budeme podrobněji studovat speciální uspořádané množiny – **svazy**. Zmíníme se krátce o úplných a distributivních svazech, resp. jaké vlastnosti má řetězec reálných čísel.

Obsah přednášky

- Dolní závora a horní závora.
- Suprema a infima.
- Svazy a úplné svazy.

Obsah přednášky

- Dolní závora a horní závora.
- Suprema a infima.
- Svazy a úplné svazy.
- Suprema a infima ohraničených množin reálných čísel.
- Svazy jako algebraická struktura.
- Distributivní svazy.

Dolní závora

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina. Prvek $a \in A$ se nazývá **dolní závora** množiny B, jestliže pro každý prvek $b \in B$ platí $a \leq b$.

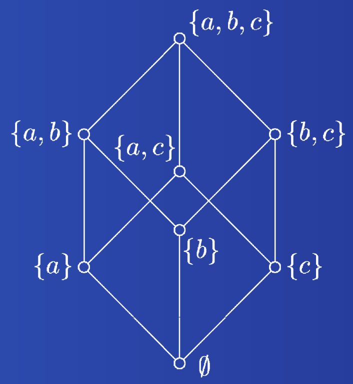
Dolní závora

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina. Prvek $a \in A$ se nazývá **dolní závora** množiny B, jestliže pro každý prvek $b \in B$ platí $a \leq b$.

Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá **zdola ohraničená**, má-li alespoň jednu dolní závoru v $(A, \leq)$.

Příklad dolní závora

Příklad Z 1. V hasseovském diagramu a) je např. prvek $\{a\}$ nebo prvek $\emptyset$ dolní závorou množiny $\{\{a,b\},\{a,c\}\}$. Jiné dolní závory množina $\{\{a,b\},\{a,c\}\}$ nemá.



a)

Horní závora

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina. Prvek $a \in A$ se nazývá **horní závora** množiny B, jestliže pro každý prvek $b \in B$ platí $a \geq b$.

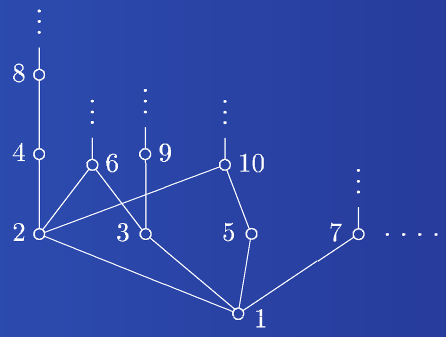
Horní závora

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina. Prvek $a \in A$ se nazývá **horní závora** množiny B, jestliže pro každý prvek $b \in B$ platí $a \geq b$.

Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá **shora ohraničená**, má-li alespoň jednu horní závoru v $(A, \leq)$.

Příklad horní závora

Příklad Z 2. V hasseovském diagramu b) uspořádané množiny $(\mathbb{N}, |\,)$ je každé přirozené číslo dělitelné šesti horní závorou množiny $\{2, 3\}$. Jiné horní závory množina $\{2, 3\}$ nemá.



b)

Duální pojmy

Horní závora a **dolní závora** jsou duální pojmy.

Duální pojmy

Horní závora a **dolní závora** jsou duální pojmy.

Prvek $a \in A$ je horní závorou množiny B v $(A, \leq)$ právě tehdy, když tento prvek je dolní závorou množiny B v duálně uspořádané množině $(A, \geq)$.

Duální pojmy

Horní závora a **dolní závora** jsou duální pojmy.

Prvek $a \in A$ je horní závorou množiny B v $(A, \leq)$ právě tehdy, když tento prvek je dolní závorou množiny B v duálně uspořádané množině $(A, \geq)$.

Podmnožina B je shora ohraničená v $(A, \leq)$ právě tehdy, když je zdola ohraničená v $(A, \geq)$.

Příklad dolní a horní závora

Příklad Z 3. V hasseovském diagramu c) uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ je každé přirozené číslo ostře větší než 2 horní závorou množiny $\{2, 3\}$ a každé přirozené číslo ostře menší než 3 dolní závorou množiny $\{2, 3\}$. Jiné horní resp. dolní závory množina $\{2, 3\}$ nemá.

c)

Infimum

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina.

Infimum

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina.

Prvek $a \in A$ se nazývá **infimum** množiny B, jestliže

> a je dolní závora množiny B a pro každou dolní závoru $c \in A$ množiny B platí $c \leq a$.

Infimum

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina.

Prvek $a \in A$ se nazývá **infimum** množiny B, jestliže

> a je dolní závora množiny B a pro každou dolní závoru $c \in A$ množiny B platí $c \leq a$.

Takový prvek a je největší dolní závorou množiny B. Infimum množiny B, pokud existuje, je určeno jednoznačně a značí se symbolem $\inf B$.

Příklady infima I

Příklad U 1. V uspořádané množině $(\mathbb{N}, \leq)$ má každá neprázdná podmnožina $M \subseteq \mathbb{N}$ infimum $\inf M$ – je jím nejmenší číslo v M.

Příklady infima I

Příklad U 1. V uspořádané množině $(\mathbb{N}, \leq)$ má každá neprázdná podmnožina $M \subseteq \mathbb{N}$ infimum $\inf M$ – je jím nejmenší číslo v M.

Pro prázdnou množinu $\emptyset$ jakožto podmnožinu v $\mathbb{N}$ pak infimum neexistuje. Totiž každé číslo $m \in \mathbb{N}$ je dolní závorou prázdné množiny a $(\mathbb{N}, \leq)$ nemá největší prvek.

Příklady infima II

Příklad U 2. V uspořádané množině $(\mathbb{N}, \mid)$ má každá neprázdná podmnožina $M \subseteq \mathbb{N}$ infimum $\inf M$ – je jím největší společný dělitel čísel obsažených v M.

Příklady infima II

Příklad U 2. V uspořádané množině $(\mathbb{N}, \mid)$ má každá neprázdná podmnožina $M \subseteq \mathbb{N}$ infimum $\inf M$ – je jím největší společný dělitel čísel obsažených v M.

Pro prázdnou množinu $\emptyset$ jakožto podmnožinu v $\mathbb{N}$ pak infimum neexistuje. Totiž každé číslo $m \in \mathbb{N}$ je dolní závorou prázdné množiny a $(\mathbb{N}, \mid)$ nemá největší prvek.

Supremum

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina.

Supremum

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina.

Prvek $a \in A$ se nazývá **supremum** množiny B, jestliže

> a je horní závora B a pro každou horní závoru $c \in A$ množiny B platí $c \geq a$.

Supremum

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina.

Prvek $a \in A$ se nazývá **supremum** množiny B, jestliže

> a je horní závora B a pro každou horní závoru $c \in A$ množiny B platí $c \geq a$.

Takový prvek a je nejmenší horní závorou množiny B. Supremum množiny B, pokud existuje, je určeno jednoznačně a značí se symbolem $\sup B$.

Supremum a infimum A a $\emptyset$

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Pak $\inf A$ a $\sup \emptyset$ existují právě tehdy, když v A existuje nejmenší prvek $\perp$, a v tom případě platí $\inf A = \sup \emptyset = \perp$.

Supremum a infimum A a $\emptyset$

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Pak $\inf A$ a $\sup \emptyset$ existují právě tehdy, když v A existuje nejmenší prvek $\perp$, a v tom případě platí $\inf A = \sup \emptyset = \perp$.
Duální tvrzení platí pro $\sup A$ a $\inf \emptyset$.

Supremum a infimum A a $\emptyset$

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Pak $\inf A$ a $\sup \emptyset$ existují právě tehdy, když v A existuje nejmenší prvek $\perp$, a v tom případě platí $\inf A = \sup \emptyset = \perp$.
Duální tvrzení platí pro $\sup A$ a $\inf \emptyset$.

To znamená, že tyto prvky existují právě tehdy, když v A existuje největší prvek $\top$, a v tom případě platí $\sup A = \inf \emptyset = \top$.

Supremum a infimum, svaz

Buď dále $B \subseteq A$ podmnožina. Existují-li prvky $\inf B$, resp. $\sup B$, pak každý z těchto prvků může, ale obecně nemusí ležet v samotné množině B.

Supremum a infimum, svaz

Buď dále $B \subseteq A$ podmnožina. Existují-li prvky $\inf B$, resp. $\sup B$, pak každý z těchto prvků může, ale obecně nemusí ležet v samotné množině B.
První případ nastává právě tehdy, když množina B má nejmenší, resp. největší prvek. Tyto prvky pak představují prvky $\inf B$, resp. $\sup B$.

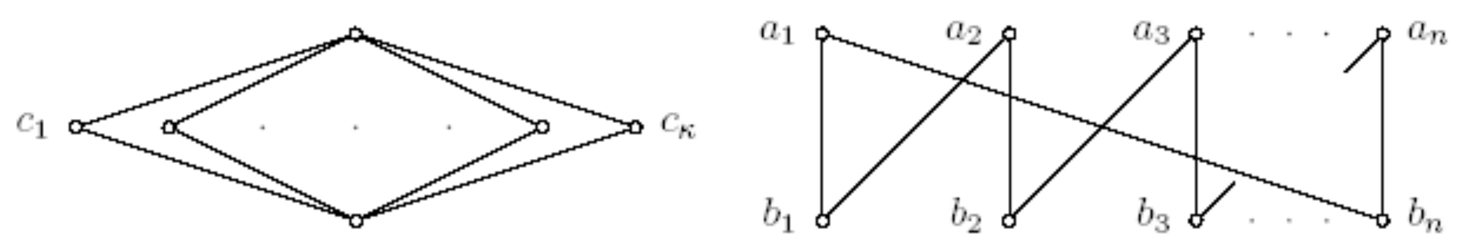
Supremum a infimum, svaz

Buď dále $B \subseteq A$ podmnožina. Existují-li prvky $\inf B$, resp. $\sup B$, pak každý z těchto prvků může, ale obecně nemusí ležet v samotné množině B.
První případ nastává právě tehdy, když množina B má nejmenší, resp. největší prvek. Tyto prvky pak představují prvky $\inf B$, resp. $\sup B$.

Uspořádaná množina $(A, \leq)$, v níž pro libovolné prvky $a, b \in A$ existují $\sup\{a, b\}$ a $\inf\{a, b\}$, se nazývá **svaz**.

Příklady svazu

Příklad S 1. První hasseovský diagram je svaz, druhý ne (stačí uvážit supremum množiny $\{a_1, a_2\}$).



Úplný svaz

Uspořádaná množina $(A, \leq)$, v níž pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$, se nazývá **úplný svaz**.

Úplný svaz

Uspořádaná množina $(A, \leq)$, v níž pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$, se nazývá **úplný svaz**.

V uspořádané množině $(A, \leq)$ pro libovolné prvky $a, b \in A$ platí

$$a \leq b \iff \inf\{a, b\} = a \iff \sup\{a, b\} = b.$$

Úplný svaz

Uspořádaná množina $(A, \leq)$, v níž pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$, se nazývá **úplný svaz**.

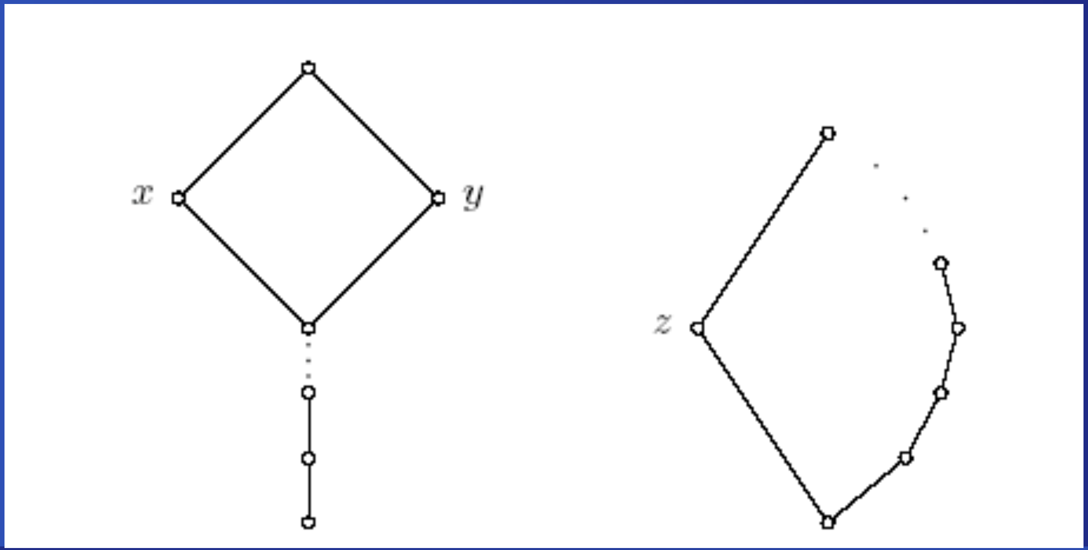
V uspořádané množině $(A, \leq)$ pro libovolné prvky $a, b \in A$ platí

$$a \leq b \iff \inf\{a, b\} = a \iff \sup\{a, b\} = b.$$

Tedy každý řetězec je svaz. Jsou ale řetězce, které nejsou úplnými svazy – například řetězec $(\mathbb{Q}, \leq)$.

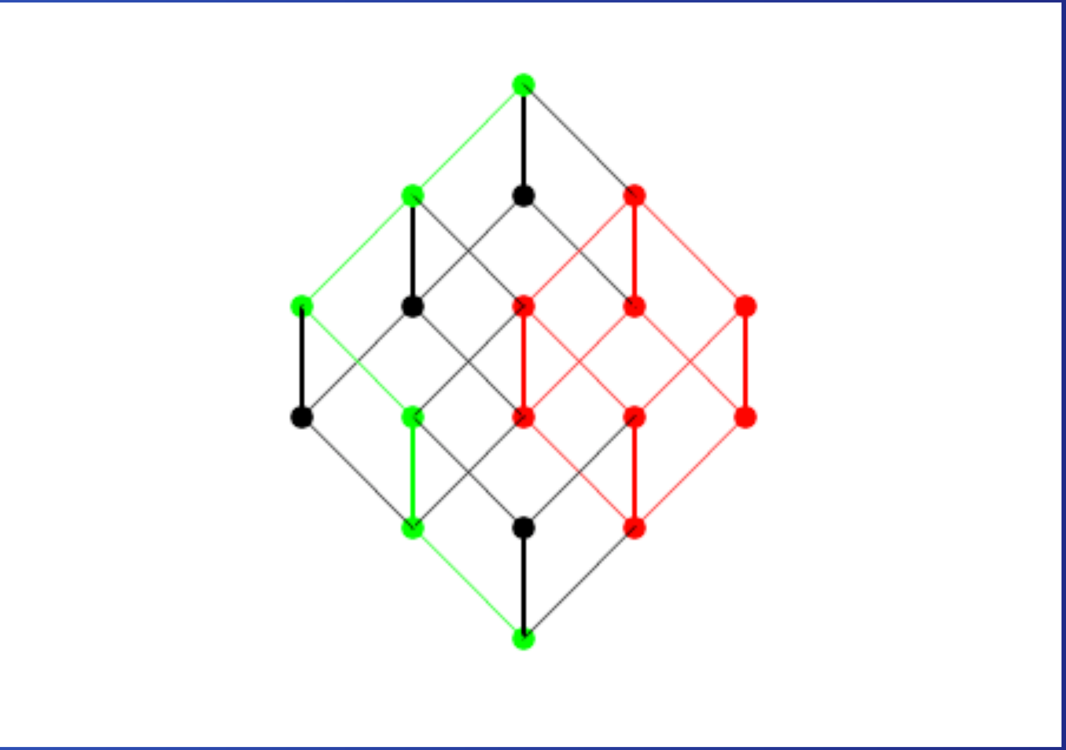
Příklady úplného svazu I

Příklad S 2. Oba hasseovské diagramy jsou úplné svazy, pokud je řetězec množina přirozených čísel. Pokud bude řetězec tvořen nezápornými racionálními čísly, úplnými svazy nebudou.



Příklady úplného svazu II

Příklad S 3. Hasseovský diagram uspořádané množiny D_{180} znázorňuje úplný svaz.



Příklady úplného svazu III

Příklad S 4. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ její potenční množina.

Příklady úplného svazu III

Příklad S 4. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ její potenční množina.
Pak v uspořádané množině $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ libovolná podmnožina $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$ má supremum i infimum a platí pro ně

Příklady úplného svazu III

Příklad S 4. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ její potenční množina.
Pak v uspořádané množině $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ libovolná podmnožina $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$ má supremum i infimum a platí pro ně

$$\sup \mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}\,, \quad \inf \mathcal{Q} = \bigcap \mathcal{Q}.$$

Příklady úplného svazu III

Příklad S 4. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ její potenční množina.
Pak v uspořádané množině $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ libovolná podmnožina $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$ má supremum i infimum a platí pro ně

$$\sup \mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}\,, \quad \inf \mathcal{Q} = \bigcap \mathcal{Q}.$$

(Přitom pro podmnožinu $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ zde chápeme $\bigcap \emptyset$ jako A.) Je tedy $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ úplný svaz.

Příklady úplného svazu IV

Příklad S 5. Buď A množina. Připomeňme, že symbolem $\mathcal{E}(A)$ jsme značili množinu všech ekvivalencí na A.

Příklady úplného svazu IV

Příklad S 5. Buď A množina. Připomeňme, že symbolem $\mathcal{E}(A)$ jsme značili množinu všech ekvivalencí na A.
Tyto ekvivalence jakožto relace na A, tedy jakožto podmnožiny v $A \times A$ lze porovnávat množinovou inkluzí $\subseteq$.

Příklady úplného svazu IV

Příklad S 5. Buď A množina. Připomeňme, že symbolem $\mathcal{E}(A)$ jsme značili množinu všech ekvivalencí na A.
Tyto ekvivalence jakožto relace na A, tedy jakožto podmnožiny v $A \times A$ lze porovnávat množinovou inkluzí $\subseteq$.
Vzniká tak uspořádaná množina $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$, která tvoří úplný svaz.

Příklady úplného svazu IV

Příklad S 5. Buď A množina. Připomeňme, že symbolem $\mathcal{E}(A)$ jsme značili množinu všech ekvivalencí na A.
Tyto ekvivalence jakožto relace na A, tedy jakožto podmnožiny v $A \times A$ lze porovnávat množinovou inkluzí $\subseteq$.
Vzniká tak uspořádaná množina $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$, která tvoří úplný svaz.
Pro libovolné podmnožiny $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}(A)$ existuje $\inf \mathcal{G} = \bigcap \mathcal{G}$ a $\sup \mathcal{H} = \bigcap \mathcal{G}_{\mathcal{H}}$, kde $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} = \{R \in \mathcal{E}(A) : H \subseteq R \quad \forall H \in \mathcal{H}\}$.

Konečná suprema ve svazu

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Pak pro libovolnou neprázdnou konečnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$.

Konečná suprema ve svazu

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Pak pro libovolnou neprázdnou konečnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$.

Důsledek. Každý konečný neprázdný svaz je úplný.

Konečná suprema ve svazu

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Pak pro libovolnou neprázdnou konečnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$.

Důsledek. Každý konečný neprázdný svaz je úplný.

Věta. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu $B \subseteq A$ existuje $\inf B$. Pak pro libovolnou podmnožinu $C \subseteq A$ existuje také $\sup C$.

Řetězec reálných čísel

Tvrzení. Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}$ má infimum v $(\mathbb{R}, \leq)$.

Řetězec reálných čísel

Tvrzení. Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}$ má infimum v $(\mathbb{R}, \leq)$. Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $N \subseteq \mathbb{R}$ má supremum v $(\mathbb{R}, \leq)$.

Řetězec reálných čísel

Tvrzení. Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}$ má infimum v $(\mathbb{R}, \leq)$. Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $N \subseteq \mathbb{R}$ má supremum v $(\mathbb{R}, \leq)$.

Připojme k množině $\mathbb{R}$ dva nové prvky $-\infty$ a ∞ a rozšiřme uspořádání $\leq$ z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tak, aby pro každé $r \in \mathbb{R}$ platilo $-\infty < r < \infty$. Tímto způsobem vzniká řetězec $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$.

Důsledek. Řetězec $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ je úplný svaz.

Řetězec reálných čísel

Tvrzení. Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}$ má infimum v $(\mathbb{R}, \leq)$. Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $N \subseteq \mathbb{R}$ má supremum v $(\mathbb{R}, \leq)$.

Připojme k množině $\mathbb{R}$ dva nové prvky $-\infty$ a ∞ a rozšiřme uspořádání $\leq$ z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tak, aby pro každé $r \in \mathbb{R}$ platilo $-\infty < r < \infty$. Tímto způsobem vzniká řetězec $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$.

Důsledek. Řetězec $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ je úplný svaz.

Značení

Je-li $(A, \leq)$ svaz, pak pro libovolné prvky $a, b \in A$ prvek $\sup\{a, b\}$ značíme krátce jako $a \vee b$ a prvek $\inf\{a, b\}$ značíme krátce jako $a \wedge b$.

Značení

Je-li $(A, \leq)$ svaz, pak pro libovolné prvky $a, b \in A$ prvek $\sup\{a, b\}$ značíme krátce jako $a \vee b$ a prvek $\inf\{a, b\}$ značíme krátce jako $a \wedge b$.

Takto jsou současně definována také dvě zobrazení

$$\vee : A \times A \to A \qquad \text{a} \qquad \wedge : A \times A \to A$$

přiřazující každé dvojici $(a, b) \in A \times A$ prvek $a \vee b$, případně $a \wedge b$.

Svaz jako algebraická struktura

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Potom pro libovolné prvky $a, b, c \in A$ platí následující rovnosti:

$$a \vee a = a \quad \text{(idempotence } \vee\text{)}$$

$$a \wedge a = a \quad \text{(idempotence } \wedge\text{)}$$

Svaz jako algebraická struktura

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Potom pro libovolné prvky $a, b, c \in A$ platí následující rovnosti:

$$a \vee a = a \qquad \text{(idempotence } \vee\text{)}$$

$$a \vee b = b \vee a \qquad \text{(komutativita } \vee\text{)}$$

$$a \wedge a = a \qquad \text{(idempotence } \wedge\text{)}$$

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad \text{(komutativita } \wedge\text{)}$$

Svaz jako algebraická struktura

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Potom pro libovolné prvky $a, b, c \in A$ platí následující rovnosti:

$$a \vee a = a \qquad \text{(idempotence } \vee\text{)}$$

$$a \vee b = b \vee a \qquad \text{(komutativita } \vee\text{)}$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad \text{(asociativita } \vee\text{)}$$

$$a \wedge a = a \qquad \text{(idempotence } \wedge\text{)}$$

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad \text{(komutativita } \wedge\text{)}$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \qquad \text{(asociativita } \wedge\text{)}$$

Svaz jako algebraická struktura

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Potom pro libovolné prvky $a, b, c \in A$ platí následující rovnosti:

$$a \vee a = a \qquad \text{(idempotence } \vee\text{)}$$

$$a \vee b = b \vee a \qquad \text{(komutativita } \vee\text{)}$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad \text{(asociativita } \vee\text{)}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad \text{(absorbce)}$$

$$a \wedge a = a \qquad \text{(idempotence } \wedge\text{)}$$

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad \text{(komutativita } \wedge\text{)}$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \qquad \text{(asociativita } \wedge\text{)}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \qquad \text{(absorbce)}$$

Rovnocennost pohledu na svazy I

Začněme nejprve se svazem $(A, \leq)$, na němž výše uvedeným způsobem vznikají binární operace $\vee, \wedge : A \times A \to A$,

Rovnocennost pohledu na svazy I

Začněme nejprve se svazem $(A, \leq)$, na němž výše uvedeným způsobem vznikají binární operace $\vee, \wedge : A \times A \to A$,

Dostáváme algebraickou strukturu $(A, \vee, \wedge)$, v níž jsou splněny výše uvedené rovnosti.

Rovnocennost pohledu na svazy I

Začněme nejprve se svazem $(A, \leq)$, na němž výše uvedeným způsobem vznikají binární operace $\vee, \wedge : A \times A \to A$,

Dostáváme algebraickou strukturu $(A, \vee, \wedge)$, v níž jsou splněny výše uvedené rovnosti.

V $(A, \leq)$ pro libovolné prvky $a, b \in A$ platí

$$a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

Rovnocennost pohledu na svazy I

Začněme nejprve se svazem $(A, \leq)$, na němž výše uvedeným způsobem vznikají binární operace $\vee, \wedge : A \times A \to A$,

Dostáváme algebraickou strukturu $(A, \vee, \wedge)$, v níž jsou splněny výše uvedené rovnosti.

V $(A, \leq)$ pro libovolné prvky $a, b \in A$ platí

$$a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

Známe-li algebru $(A, \vee, \wedge)$, můžeme z ní uspořádanou množinu $(A, \leq)$ zpět rekonstruovat.

Rovnocennost pohledu na svazy II

Nechť $(A, \vee, \wedge)$ je algebra splňující uvedené rovnosti.

Rovnocennost pohledu na svazy II

Nechť $(A, \vee, \wedge)$ je algebra splňující uvedené rovnosti.

Pak předchozí formulí je možno k ní pořídit uspořádanou množinu $(A, \leq)$, která bude svazem, přičemž algebra odvozená z tohoto svazu bude totožná s algebrou výchozí.

Rovnocennost pohledu na svazy III

Tvrzení. Buď $(A, \vee, \wedge)$ množina se dvěma binárními operacemi vyhovujícími všem podmínkám z předchozího tvrzení.

Rovnocennost pohledu na svazy III

Tvrzení. Buď $(A, \vee, \wedge)$ množina se dvěma binárními operacemi vyhovujícími všem podmínkám z předchozího tvrzení.

Pak relace $\leq$ na A definovaná pro každá $a, b \in A$ předpisem

$$a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b$$

je uspořádání a $(A, \leq)$ je svaz.

Rovnocennost pohledu na svazy III

Tvrzení. Buď $(A, \vee, \wedge)$ množina se dvěma binárními operacemi vyhovujícími všem podmínkám z předchozího tvrzení.

Pak relace $\leq$ na A definovaná pro každá $a, b \in A$ předpisem

$$a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b$$

je uspořádání a $(A, \leq)$ je svaz.

Navíc pak v tomto svazu platí, že pro libovolná $a, b \in A$ je $\sup\{a, b\} = a \vee b$ a $\inf\{a, b\} = a \wedge b$.

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

$$(**) \quad (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).$$

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

$$(**) \quad (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).$$

Svaz $(A, \leq)$ splňující kteroukoliv z podmínek $(*)$, $(**)$ uvedených v předchozím tvrzení se nazývá **distributivní**.

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

$$(**) \quad (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).$$

Svaz $(A, \leq)$ splňující kteroukoliv z podmínek $(*)$, $(**)$ uvedených v předchozím tvrzení se nazývá **distributivní**. Distributivita je samoduální vlastnost.

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

$$(**) \quad (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).$$

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

$$(**) \quad (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).$$

Svaz $(A, \leq)$ splňující kteroukoliv z podmínek $(*)$, $(**)$ uvedených v předchozím tvrzení se nazývá **distributivní**.

Distributivní svazy I

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

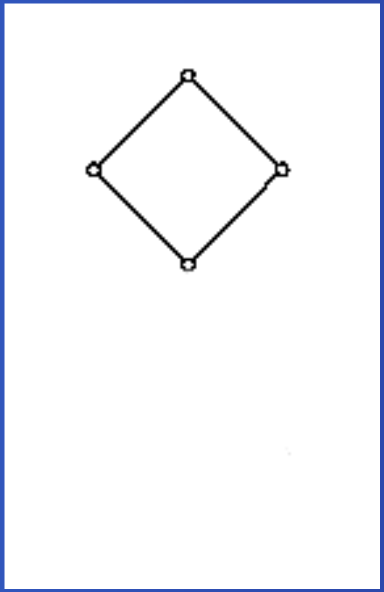
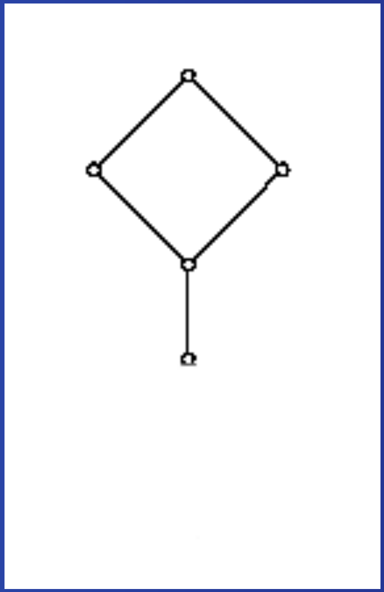
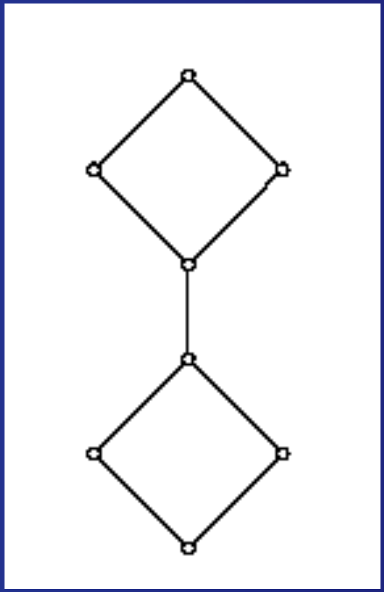
$$(*) \quad (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)),$$

$$(**) \quad (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).$$

Svaz $(A, \leq)$ splňující kteroukoliv z podmínek $(*)$, $(**)$ uvedených v předchozím tvrzení se nazývá **distributivní**. Distributivita je samoduální vlastnost.

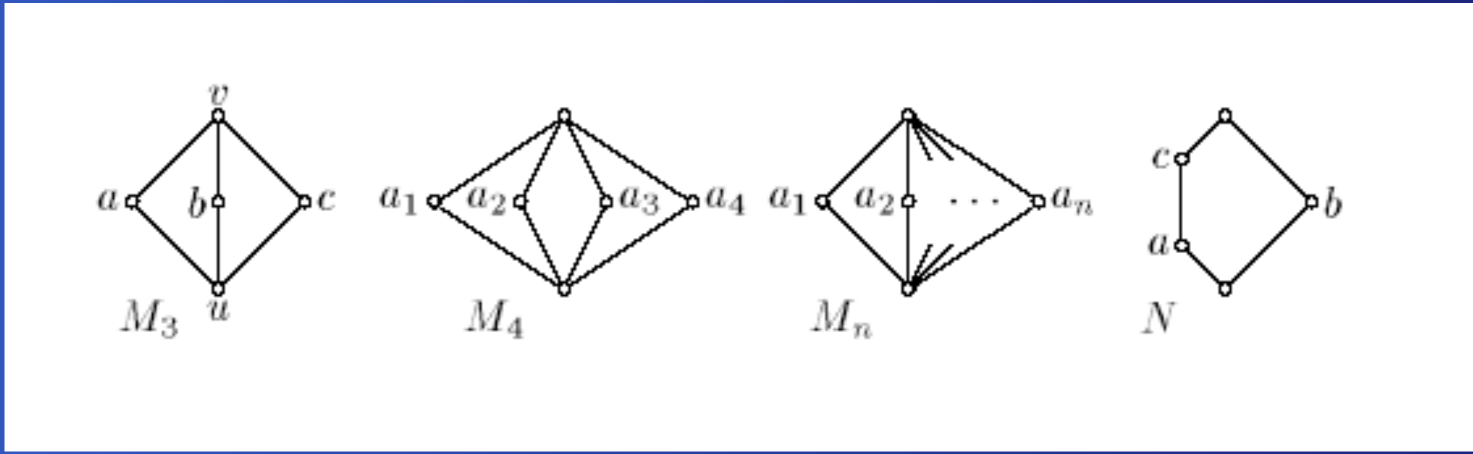
Příklady distributivních svazů I

Příklad D 1. Následující hasseovské diagramy znázorňují úplné svazy, které jsou distributivní.

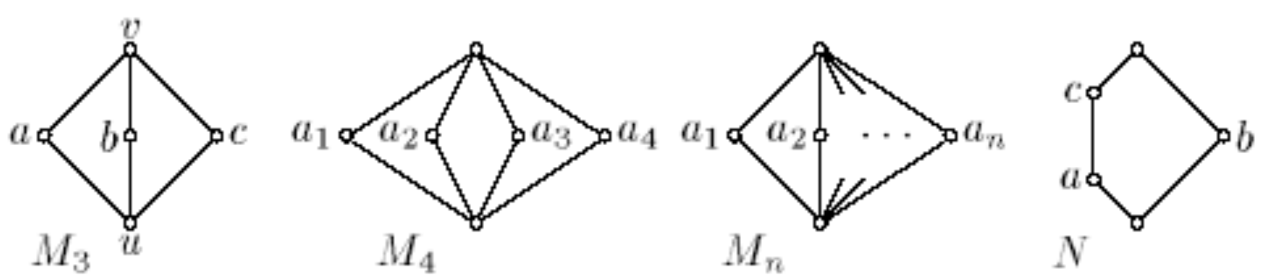
Příklady nedistributivních svazů I

Příklad D 2. Následující hasseovské diagramy znázorňují úplné svazy, které nejsou distributivní.



Příklady nedistributivních svazů I

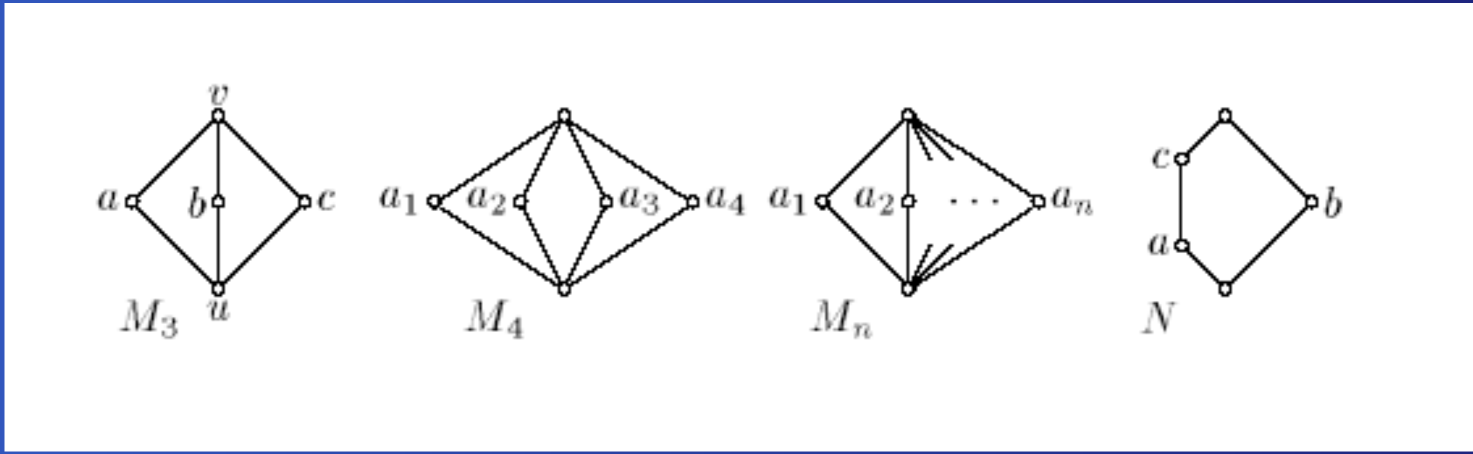
Příklad D 2. Následující hasseovské diagramy znázorňují úplné svazy, které nejsou distributivní.



Například v uspořádané množině M_n, $n \geq 3$, máme rovnosti $a_1 \vee a_3 = \top = a_2 \vee a_3$, tj. $(a_1 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_3) = \top$, ale $(a_1 \wedge a_2) \vee a_3 = a_3 \neq \top$.

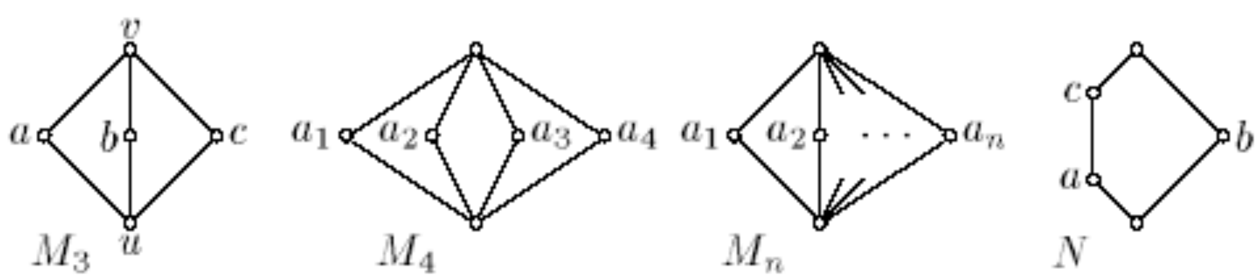
Příklady nedistributivních svazů I

Příklad D 2. Následující hasseovské diagramy znázorňují úplné svazy, které nejsou distributivní.



Příklady nedistributivních svazů I

Příklad D 2. Následující hasseovské diagramy znázorňují úplné svazy, které nejsou distributivní.



V uspořádané množině N máme rovnosti $a \wedge c = a$, $b \wedge c = \perp$, tj. $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a$, ale $(a \vee b) \wedge c = c \neq a$.

Příklady distributivních svazů II

Příklad D 3. Následující hasseovský diagram znázorňuje úplný distributivní svaz, který vznikl jako kartézský součin prvního a třetího svazu z příkladu D 1.