Uspořádané množiny

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

Abstrakt

V této kapitole budeme podrobněji studovat relace na množině, které splňují současně několik z dříve definovaných vlastností relací.

Abstrakt

V této kapitole budeme podrobněji studovat relace na množině, které splňují současně několik z dříve definovaných vlastností relací. Stěžejním pojmem je **uspořádání** jakožto reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace na množině.

Abstrakt

V této kapitole budeme podrobněji studovat relace na množině, které splňují současně několik z dříve definovaných vlastností relací. Stěžejním pojmem je **uspořádání** jakožto reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace na množině. Dalším pojmem je pojem **hasseovského diagramu uspořádané množiny**, který koresponduje zjednodušenému uzlovému grafu relace.

Abstrakt

V této kapitole budeme podrobněji studovat relace na množině, které splňují současně několik z dříve definovaných vlastností relací. Stěžejním pojmem je **uspořádání** jakožto reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace na množině. Dalším pojmem je pojem **hasseovského diagramu uspořádané množiny**, který koresponduje zjednodušenému uzlovému grafu relace. Aplikací výše uvedených pojmů zkonstruujeme množinu **reálných čísel**.

Obsah přednášky

- Úvod
- Uspořádání a uspořádaná množina, řetězec.
- Hasseovský diagram uspořádané množiny.

Obsah přednášky

- Úvod
- Uspořádání a uspořádaná množina, řetězec.
- Hasseovský diagram uspořádané množiny.
- Největší a nejmeněí prvek.
- Maximální a minimální prvek.

Obsah přednášky

- Úvod
- Uspořádání a uspořádaná množina, řetězec.
- Hasseovský diagram uspořádané množiny.
- Největší a nejmeneší prvek.
- Maximální a minimální prvek.
- Řez, skok, mezera.
- Konstrukce reálných čísel.

Relace uspořádání

Nechť (A, ϱ) je množina s relací, přičemž relace ϱ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Relace uspořádání

Nechť (A, ϱ) je množina s relací, přičemž relace ϱ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Pak relace ϱ se nazývá **uspořádání** a (A, ϱ) se nazývá **uspořádaná množina**.

Relace uspořádání

Nechť (A, ϱ) je množina s relací, přičemž relace ϱ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Pak relace ϱ se nazývá **uspořádání** a (A, ϱ) se nazývá **uspořádaná množina**.

Je – li navíc relace ϱ úplná, pak se ϱ nazývá **lineární uspořádání**.

Relace uspořádání

Nechť (A, ϱ) je množina s relací, přičemž relace ϱ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Pak relace ϱ se nazývá **uspořádání** a (A, ϱ) se nazývá **uspořádaná množina**.

Je – li navíc relace ϱ úplná, pak se ϱ nazývá **lineární uspořádání**.

(A, ϱ) se pak nazývá **lineárně uspořádaná množina** nebo krátce **řetězec**.

Příklady uspořádání I

Příklad U 1. Relace inkluze $R_{\subseteq} = \subseteq$ na množině $2^A = \mathcal{P}(A)$ (tzn. na množině všech podmnožin množiny A) je relací uspořádání.

Příklady uspořádání I

Příklad U 1. Relace inkluze $R_{\subseteq} = \subseteq$ na množině $2^A = \mathcal{P}(A)$ (tzn. na množině všech podmnožin množiny A) je relací uspořádání.

Přitom $(2^A, \subseteq)$ je lineárně uspořádaná množina právě když množina A je prázdná nebo jednoprvková (tzn. právě když množina 2^A má jeden nebo dva prvky).

Příklady uspořádání II

Příklad U 2. Relace dělitelnosti $\mid$ na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je relací uspořádání.

Příklady uspořádání II

Příklad U 2. Relace dělitelnosti $\mid$ na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je relací uspořádání.

Přitom $(\mathbb{N}, \mid)$ **není** lineárně uspořádaná množina.

Příklady uspořádání II

Příklad U 2. Relace dělitelnosti $|$ na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je relací uspořádání.

Přitom $(\mathbb{N}, |)$ **není** lineárně uspořádaná množina.

Relace dělitelnosti na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ **není** relací uspořádání, a to proto, že není antisymetrická.

Příklady uspořádání III

Příklad U 3. Relace uspořádání čísel podle velikosti $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ je relací lineárního uspořádání.

Příklady uspořádání III

Příklad U 3. Relace uspořádání čísel podle velikosti $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ je relací lineárního uspořádání.

Tedy $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina.

Příklady uspořádání III

Příklad U 3. Relace uspořádání čísel podle velikosti $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ je relací lineárního uspořádání.

Tedy $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina.

Relací "uspořádání čísel podle velikosti" rozumíme relaci $\leq$ definovanou způsobem známým ze střední školy, tzn.

$x \leq y$ právě když $y - x$ je nezáporné číslo.

Příklady uspořádání IV

Příklad U 4. Relace uspořádání čísel podle velikosti $\leq$ je relací lineárního uspořádání na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$, racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a reálných čísel $\mathbb{R}$.

Příklady uspořádání IV

Příklad U 4. Relace uspořádání čísel podle velikosti $\leq$ je relací lineárního uspořádání na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$, racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a reálných čísel $\mathbb{R}$.

Dostáváme tak lineárně uspořádané množiny $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \leq)$.

Příklady uspořádání V

Příklad U 5. Pro libovolnou množinu A je diagonální relace Δ_A uspořádání na A.

Příklady uspořádání V

Příklad U 5. Pro libovolnou množinu A je diagonální relace Δ_A uspořádání na A.

Uspořádaná množina (A, Δ_A) se nazývá **protiřetězec**.

Příklady uspořádání VI

Příklad U 6. Buď n přirozené číslo a uvažme množinu $\mathcal{D}_n$ dělitelů čísla n. Relace dělitelnosti $|$ na množině $\mathcal{D}_n$ je relací uspořádání.

Příklady uspořádání VI

Příklad U 6. Buď n přirozené číslo a uvažme množinu $\mathcal{D}_n$ dělitelů čísla n. Relace dělitelnosti $|$ na množině $\mathcal{D}_n$ je relací uspořádání.

Přitom $(\mathcal{D}_n, |)$ **není** lineárně uspořádaná množina.

Úmluva

Libovolnou relaci uspořádání budeme v dalším při obecných úvahách označovat symbolem $\leq$ ("menší nebo rovno") místo symbolu ϱ nebo jiných řeckých písmen.

Úmluva

Libovolnou relaci uspořádání budeme v dalším při obecných úvahách označovat symbolem $\preceq$ ("menší nebo rovno") místo symbolu ϱ nebo jiných řeckých písmen.

Totiž klasickým příkladem relace uspořádání je uspořádání čísel podle velikosti, označované standardně symbolem $\leq$

Úmluva

Libovolnou relaci uspořádání budeme v dalším při obecných úvahách označovat symbolem $\leq$ ("menší nebo rovno") místo symbolu ϱ nebo jiných řeckých písmen.

Totiž klasickým příkladem relace uspořádání je uspořádání čísel podle velikosti, označované standardně symbolem $\leq$

Místo konjunkce $x \leq y \;\wedge\; x \neq y$ budeme stručně psát $x < y$

Grafické znázornění I

Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ můžeme (zejména, je – li množina A konečná) znázorňovat graficky.

Grafické znázornění I

Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ můžeme (zejména, je – li množina A konečná) znázorňovat graficky.

Postupujeme přitom následujícím způsobem:

Grafické znázornění I

Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ můžeme (zejména, je – li množina A konečná) znázorňovat graficky.

Postupujeme přitom následujícím způsobem:

1. Prvky množiny A znázorníme jako body v rovině.

Grafické znázornění I

Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ můžeme (zejména, je – li množina A konečná) znázorňovat graficky.

Postupujeme přitom následujícím způsobem:

1. Prvky množiny A znázorníme jako body v rovině.
2. Je – li $x < y$ pak bod x nakreslíme níže než bod y.

Grafické znázornění I

Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ můžeme (zejména, je – li množina A konečná) znázorňovat graficky.

Postupujeme přitom následujícím způsobem:

1. Prvky množiny A znázorníme jako body v rovině.
2. Je – li $x < y$ pak bod x nakreslíme níže než bod y.
3. Dva body x, y spojíme úsečkou právě tehdy, když $x < y$ a neexistuje žádný bod "mezi nimi", tzn. neexistuje $k \in A$ tak, že $x < k \wedge k < y$.

Grafické znázornění II

Výsledný graf se pak nazývá **hasseovský diagram** uspořádané množiny $(A, \leq)$.

Grafické znázornění II

Výsledný graf se pak nazývá **hasseovský diagram** uspořádané množiny $(A, \leq)$.

Jedná se o zjednodušený uzlový graf relace $\leq$.

Grafické znázornění II

Výsledný graf se pak nazývá **hasseovský diagram** uspořádané množiny $(A, \leq)$.

Jedná se o zjednodušený uzlový graf relace $\leq$.

- Jsou vynechány šipky, které by měly být u každého bodu.

Grafické znázornění II

Výsledný graf se pak nazývá **hasseovský diagram** uspořádané množiny $(A, \leq)$.

Jedná se o zjednodušený uzlový graf relace $\leq$.

- Jsou vynechány šipky, které by měly být u každého bodu.
- Je vynechána orientace šipek, která je nahrazena umístěním bodu ”níže” či ”výše”.

Grafické znázornění II

Výsledný graf se pak nazývá **hasseovský diagram** uspořádané množiny $(A, \leq)$.

Jedná se o zjednodušený uzlový graf relace $\leq$.

- Jsou vynechány šipky, které by měly být u každého bodu.
- Je vynechána orientace šipek, která je nahrazena umístěním bodu ”níže” či ”výše”.
- Jsou vynechány ”zbytečné” šipky, jejichž existence plyne z tranzitivnosti relace $\leq$.

Příklady uspořádání VII

Příklad U 7. Nechť $A = \{a, b, c\}$; potom je $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Hasseovský diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$ je znázorněn na obrázku a).

Část hasseovského diagramu uspořádané množiny $(\mathbb{N}, |\,)$ z příkladu je znázorněna na obrázku b).

Část hasseovského diagramu uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq\,)$ je znázorněna na obrázku c).

Příklady uspořádání VII

Příklad U 7. Nechť $A = \{a, b, c\}$; potom je $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

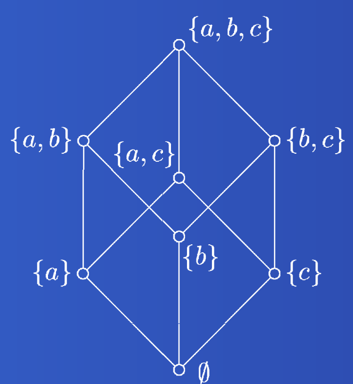
Hasseovský diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$ je znázorněn na obrázku a).

Část hasseovského diagramu uspořádané množiny $(\mathbb{N}, |\,)$ z příkladu je znázorněna na obrázku b).

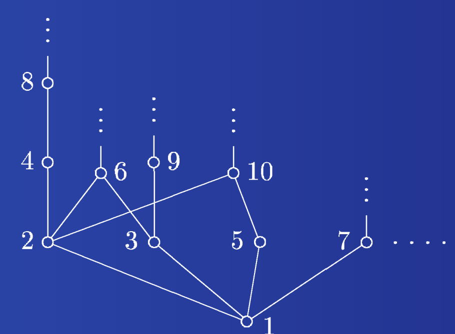
Část hasseovského diagramu uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq\,)$ je znázorněna na obrázku c).

Příklady uspořádání VII

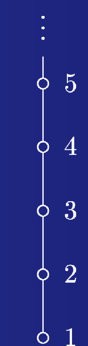
Příklad U 7. Hasseovské diagramy



a)



b)



c)

Duální uspořádání

Je-li $\leq$ uspořádání na množině A, pak inverzní relace $\leq^{-1}$ je rovněž uspořádání na A a toto uspořádání obvykle značíme symbolem $\geq$.

Duální uspořádání

Je-li $\leq$ uspořádání na množině A, pak inverzní relace $\leq^{-1}$ je rovněž uspořádání na A a toto uspořádání obvykle značíme symbolem $\geq$.

Příslušná uspořádaná množina $(A, \geq)$ se pak nazývá **duálně uspořádaná** k množině $(A, \leq)$.

Duální uspořádání

Je-li $\leq$ uspořádání na množině A, pak inverzní relace $\leq^{-1}$ je rovněž uspořádání na A a toto uspořádání obvykle značíme symbolem $\geq$.

Příslušná uspořádaná množina $(A, \geq)$ se pak nazývá **duálně uspořádaná** k množině $(A, \leq)$.

Je-li množina A konečná, potom hasseovský diagram uspořádané množiny $(A, \geq)$ vznikne překlopením hasseovského diagramu množiny $(A, \leq)$ „vzhůru nohama".

Význačné prvky

Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in M$ se nazývá

Význačné prvky

Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in M$ se nazývá

nejmenší, jestliže pro každé $x \in M$ platí: $a \leq x$

Význačné prvky

Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in M$ se nazývá

nejmenší, jestliže pro každé $x \in M$ platí: $a \leq x$
největší, jestliže pro každé $x \in M$ platí: $x \leq a$

Význačné prvky

Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in M$ se nazývá

nejmenší , jestliže pro každé $x \in M$ platí : $a \leq x$

největší , jestliže pro každé $x \in M$ platí : $x \leq a$

minimální , jestliže neexistuje prvek $x \in M$ s vlastností : $x < a$

Význačné prvky

Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Prvek $a \in M$ se nazývá

nejmenší,	jestliže pro každé $x \in M$ platí : $a \leq$
největší,	jestliže pro každé $x \in M$ platí : $x \leq$
minimální,	jestliže neexistuje prvek $x \in M$ s vlastností : $x < a$
maximální,	jestliže neexistuje prvek $x \in M$ s vlastností : $a < x$.

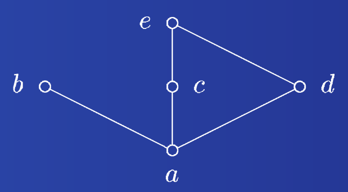
Srovnatelné prvky

Dále, dva prvky $x, y \in M$ se nazývají **srovnatelné**, jestliže platí, že $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

V opačném případě se prvky x, y nazývají **nesrovnatelné**.

Příklady uspořádání - VIII

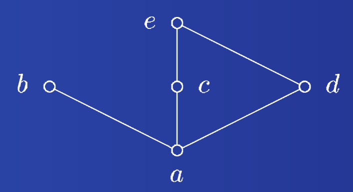
Příklad U.8 Nechť uspořádaná množina $(A, \leq)$ je zadána následujícím hasseovským diagramem:



- Nejmenším prvkem této uspořádané množiny je prvek a, největší prvek zde neexistuje.

Příklady uspořádání - VIII

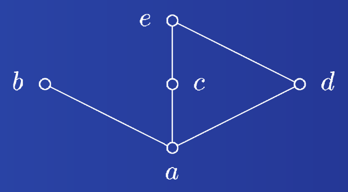
Příklad U.8 Nechť uspořádaná množina $(A, \leq)$ je zadána následujícím hasseovským diagramem:



- Minimálním prvkem je prvek a a maximálními prvky jsou prvky b, e.

Příklady uspořádání - VIII

Příklad U.8 Nechť uspořádaná množina $(A, \leq)$ je zadána hasseovským diagramem:



- Nesrovnatelnými prvky jsou dvojice prvků b, c, resp. b, d, resp. b, e, resp. c, d.
- Všechny ostatní dvojice prvků jsou srovnatelné prvky.

Příklady uspořádání - IX

Příklad U.9 V uspořádané množině $(\omega, |\,)$ je číslo 1 nejmenším prvkem a číslo 0 je největším prvkem.

Příklady uspořádání - IX

Příklad U.9 V uspořádané množině $(\omega, |\,)$ je číslo 1 nejmenším prvkem a číslo 0 je největším prvkem.

V uspořádané množině $(\mathbb{N}, |\,)$, kde oproti předchozímu chybí číslo 0, je číslo 1 stále nejmenším prvkem, avšak není zde největší prvek a neexistují zde ani žádné maximální prvky.

Příklady uspořádání - IX

Příklad U.9 V uspořádané množině $(\omega, |\,)$ je číslo 1 nejmenším prvkem a číslo 0 je největším prvkem.

V uspořádané množině $(\mathbb{N}, |\,)$, kde oproti předchozímu chybí číslo 0, je číslo 1 stále nejmenším prvkem, avšak není zde největší prvek a neexistují zde ani žádné maximální prvky.

V uspořádané množině $(\mathbb{N} - \{1\}, |\,)$ není nejmenší prvek a minimálními prvky jsou zde právě všechna prvočísla.

Příklady uspořádání - X

Příklad U.10 Je-li A neprázdná množina, pak v protiřetězci (A, Δ_A) jsou všechny prvky současně minimálními i maximálními prvky.

Příklady uspořádání - X

Příklad U.10 Je-li A neprázdná množina, pak v protiřetězci (A, Δ_A) jsou všechny prvky současně minimálními i maximálními prvky.

Není-li přitom množina A jednoprvková, neexistují zde nejmenší ani největší prvek.

Zobrazení zachovávající uspořádání

Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou dvě uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Zobrazení zachovávající uspořádání

Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou dvě uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Řekneme, že zobrazení f je **izotonní**, je-li splněna podmínka

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)).$$

Příklady izotonních zobrazení - I

Příklad I.1 Identické zobrazení $id_{\mathbb{N}}$ na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je izotonním zobrazením uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \mid)$ s uspořádáním daným dělitelností čídel na uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ s obvyklým uspořádáním čísel podle velikosti.

Příklady izotonních zobrazení - I

Příklad I.1 Identické zobrazení $id_{\mathbb{N}}$ na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je izotonním zobrazením uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \mid)$ s uspořádáním daným dělitelností čídel na uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ s obvyklým uspořádáním čísel podle velikosti.

Ale, $id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \mid)$ není izotonním zobrazením.

Příklady izotonních zobrazení - I

Příklad I.1 Identické zobrazení $id_{\mathbb{N}}$ na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je izotonním zobrazením uspořádané množiny $(\mathbb{N}, |\,)$ s uspořádáním daným dělitelností čídel na uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ s obvyklým uspořádáním čísel podle velikosti.

Ale, $id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, |\,)$ není izotonním zobrazením.

Totiž, například $2 \leq 3$, ale neplatí $2|3$.

Příklady izotonních zobrazení - II

Příklad I.2 Pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je identita id_A na A izotonním zobrazením protiřetězce (A, Δ_A) na množinu $(A, \leq)$.

Příklady izotonních zobrazení - II

Příklad I.2 Pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je identita id_A na A izotonním zobrazením protiřetězce (A, Δ_A) na množinu $(A, \leq)$.

Ale, $id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow (\mathbb{N}, \Delta_A)$ není izotonním zobrazením.

Příklady izotonních zobrazení - II

Příklad I.2 Pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je identita id_A na A izotonním zobrazením protiřetězce (A, Δ_A) na množinu $(A, \leq)$.

Ale, $id_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow (\mathbb{N}, \Delta_A)$ není izotonním zobrazením.

Totiž, například $2 \leq 3$, ale neplatí $2 = 3$.

Izomorfismy

Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Izomorfismy

Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

Řekneme, že zobrazení f je **izomorfismus** a uspořádané množiny $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou **izomorfní**, jestliže f je bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Izomorfismy

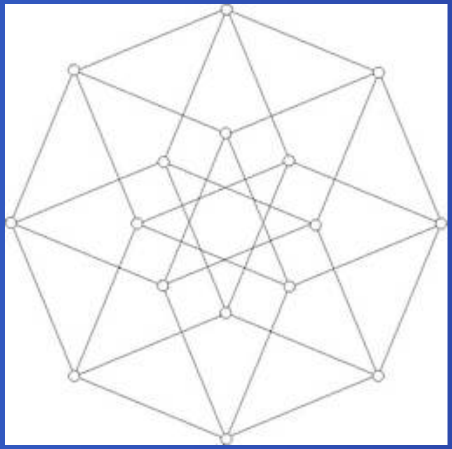
Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

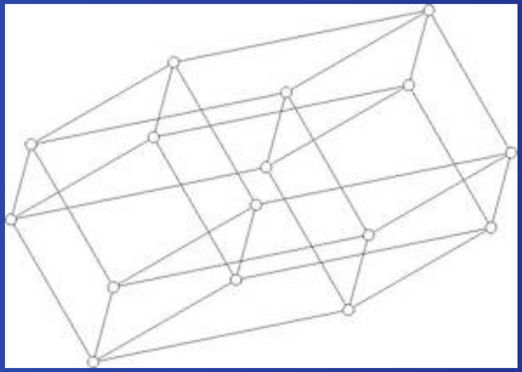
Řekneme, že zobrazení f je **izomorfismus** a uspořádané množiny $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou **izomorfní**, jestliže f je bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

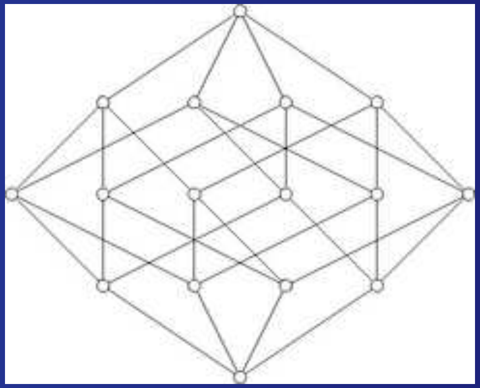
Je-li f je bijekce, je f izomorfismus právě tehdy,když

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \iff f(x) \sqsubseteq f(y)).$$

Izomorfní množiny







Konstrukce reálných čísel I

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že podmnožina $B \subseteq A$ je **hustá** v $(A, \leq)$, jestliže pro každá $x, y \in A$ splňující $x < y$ existuje $z \in B$ takové, že platí $x < z < y$.

Konstrukce reálných čísel I

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že podmnožina $B \subseteq A$ je **hustá** v $(A, \leq)$, jestliže pro každá $x, y \in A$ splňující $x < y$ existuje $z \in B$ takové, že platí $x < z < y$.

Při obvyklém uspořádání čísel podle velikosti není řetězec $(\mathbb{Z}, \leq)$ hustý, zatímco řetězec $(\mathbb{Q}, \leq)$ hustý je.

Konstrukce reálných čísel I

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že podmnožina $B \subseteq A$ je **hustá** v $(A, \leq)$, jestliže pro každá $x, y \in A$ splňující $x < y$ existuje $z \in B$ takové, že platí $x < z < y$.

Při obvyklém uspořádání čísel podle velikosti není řetězec $(\mathbb{Z}, \leq)$ hustý, zatímco řetězec $(\mathbb{Q}, \leq)$ hustý je.

Zvolíme $z = \frac{x+y}{2}$.

Konstrukce reálných čísel II

Nechť $(A, \leq)$ je úplně uspořádaná množina, tedy řetězec, a nechť $G, H \subseteq A$ jsou neprázdné podmnožiny.

Konstrukce reálných čísel II

Nechť $(A, \leq)$ je úplně uspořádaná množina, tedy řetězec, a nechť $G, H \subseteq A$ jsou neprázdné podmnožiny.

Řekneme, že uspořádaná dvojice (G, H) je **řez** v množině $(A, \leq)$, platí-li následující podmínky:

Konstrukce reálných čísel II

Nechť $(A, \leq)$ je úplně uspořádaná množina, tedy řetězec, a nechť $G, H \subseteq A$ jsou neprázdné podmnožiny.

Řekneme, že uspořádaná dvojice (G, H) je **řez** v množině $(A, \leq)$, platí-li následující podmínky:

$$G \cup H = A,$$

$$G \cap H = \emptyset,$$

$$(\forall x \in G)(\forall y \in H)(x < y).$$

Konstrukce reálných čísel III

Je zřejmé, že pak platí také podmínky:

Konstrukce reálných čísel III

Je zřejmé, že pak platí také podmínky:

$$(\forall a \in A)(\forall x \in G)(a < x \implies a \in G),$$

Konstrukce reálných čísel III

Je zřejmé, že pak platí také podmínky:

$$(\forall a \in A)(\forall x \in G)(a < x \implies a \in G),$$

$$(\forall b \in A)(\forall y \in H)(y < b \implies b \in H).$$

Konstrukce reálných čísel IV

Řez (G, H) v řetězci $(A, \leq)$ se nazývá

Konstrukce reálných čísel IV

Řez (G, H) v řetězci $(A, \leq)$ se nazývá

skok, obsahuje-li G největší prvek a H nejmenší prvek,

Konstrukce reálných čísel IV

Řez (G, H) v řetězci $(A, \leq)$ se nazývá

- **skok**, obsahuje-li G největší prvek a H nejmenší prvek,
- **mezera**, neobsahuje-li G největší prvek ani H nejmenší prvek,

Konstrukce reálných čísel IV

Řez (G, H) v řetězci $(A, \leq)$ se nazývá

- **skok**, obsahuje-li G největší prvek a H nejmenší prvek,
- **mezera**, neobsahuje-li G největší prvek ani H nejmenší prvek,
- **dedekindovský řez 1. druhu**, obsahuje-li G největší prvek, avšak H neobsahuje nejmenší prvek,

Konstrukce reálných čísel IV

Řez (G, H) v řetězci $(A, \leq)$ se nazývá

- **skok**, obsahuje-li G největší prvek a H nejmenší prvek,
- **mezera**, neobsahuje-li G největší prvek ani H nejmenší prvek,
- **dedekindovský řez 1. druhu**, obsahuje-li G největší prvek, avšak H neobsahuje nejmenší prvek,
- **dedekindovský řez 2. druhu**, neobsahuje-li G největší prvek, avšak H obsahuje nejmenší prvek.

Konstrukce reálných čísel V

Při obvyklém uspořádání čísel podle velikosti je v řetězci $(\mathbb{Z}, \leq)$ každý řez skokem, zatímco v řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$ žádný skok není.

Konstrukce reálných čísel V

Při obvyklém uspořádání čísel podle velikosti je v řetězci $(\mathbb{Z}, \leq)$ každý řez skokem, zatímco v řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$ žádný skok není.

V řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$ jsou

$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid q < y\}\big),$$ resp.

$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid q \leq y\}\big)$$

dedekindovské řezy 1. druhu. , resp. 2. druhu.

Konstrukce reálných čísel VI

V řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$ jsou

$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid q < y\}\big), \text{ resp.}$$
$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid q \leq y\}\big)$$

dedekindovské řezy 1. druhu. , resp. 2. druhu.

Konstrukce reálných čísel VI

V řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$ jsou

$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq q\}, \{y \in \mathbb{Q} \,|\, q < y\}\big), \text{ resp.}$$
$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < q\}, \{y \in \mathbb{Q} \,|\, q \leq y\}\big)$$

dedekindovské řezy 1. druhu. , resp. 2. druhu.

Pro každé $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$\big(\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x < r\}, \{y \in \mathbb{Q} \,|\, r < y\}\big)$$

je mezera.

Konstrukce reálných čísel VII

Dedekindova konstrukce reálných čísel

Konstrukce reálných čísel VII

Dedekindova konstrukce reálných čísel

S pomocí množiny $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel sestrojíme množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Konstrukce reálných čísel VII

Dedekindova konstrukce reálných čísel

S pomocí množiny $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel sestrojíme množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Označme $\mathcal{R}$ množinu všech dedekindovských řezů 1. druhu a všech mezer v řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Konstrukce reálných čísel VII

Dedekindova konstrukce reálných čísel

S pomocí množiny $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel sestrojíme množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Označme $\mathcal{R}$ množinu všech dedekindovských řezů 1. druhu a všech mezer v řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Na množině $\mathcal{R}$ definujeme relaci $\preceq$ následujícím předpisem. Pro libovolné dva řezy (G, H), $(K, L) \in \mathcal{R}$ klademe:

$$(G, H) \preceq (K, L) \iff G \subseteq K \iff L \subseteq H.$$

Konstrukce reálných čísel VIII

$(\mathcal{R}, \preceq)$ je řetězec.

Konstrukce reálných čísel VIII

$(\mathcal{R}, \preceq)$ je řetězec.

Zobrazení

$$\zeta \,:\, \mathbb{R} \to \mathcal{R}$$

dané pro každé $r \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\zeta(r) = \big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid r < y\}\big)$$

je izomorfismus řetězce $(\mathbb{R}, \leq)$ s obvyklým uspořádáním čísel na řetězec $(\mathcal{R}, \preceq)$.

Konstrukce reálných čísel IX

V izomorfismu $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ racionálním číslům odpovídají dedekindovské řezy 1. druhu a iracionálním číslům odpovídají mezery.

Konstrukce reálných čísel IX

V izomorfismu $\zeta : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ racionálním číslům odpovídají dedekindovské řezy 1. druhu a iracionálním číslům odpovídají mezery.

Tvrzení. Množina $\mathbb{Q}$ je hustá v řetězci $(\mathbb{R}, \leq)$.

Konstrukce reálných čísel IX

V izomorfismu $\zeta : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ racionálním číslům odpovídají dedekindovské řezy 1. druhu a iracionálním číslům odpovídají mezery.

Tvrzení. Množina $\mathbb{Q}$ je hustá v řetězci $(\mathbb{R}, \leq)$.