Ekvivalence a rozklady

Nechť A je množina a nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo. Pak libovolnou podmnožinu ϱ kartézské mocniny A^n nazýváme **n-ární relací** na množině A. Je-li $n = 1$, pak prostě ϱ je podmnožinou množiny A a říkáme též, že ϱ je **unární** relace na A. Je-li $n = 2$, tedy je-li $\varrho \subseteq A^2$, říkáme, že ϱ je **binární** relace na A. Podobně je-li $n = 3$, tedy je-li $\varrho \subseteq A^3$, říkáme, že ϱ je **ternární** relace na A, atd. Významnou roli ovšem hrají binární relace. Proto řekneme-li pouze, že ϱ je relace na A, budeme tím mít na mysli, že ϱ je binární relace na A.

Pro libovolnou množinu A je identické zobrazení id_A relací na množině A, v této souvislosti se značí též Δ_A, takže máme $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$, a nazývá se **diagonální relace** na A.

Relace ϱ na A se nazývá **reflexivní**, je-li splněno $\Delta_A \subseteq \varrho$, tedy platí-li

$$(\forall a \in A)(a \, \varrho \, a).$$

Relace ϱ na A se nazývá **symetrická**, je-li splněno $\varrho = \varrho^{-1}$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \, \varrho \, b \implies b \, \varrho \, a).$$

Relace ϱ na A se nazývá **asymetrická**, je-li splněno $\varrho \cap \varrho^{-1} = \emptyset$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \, \varrho \, b \implies b \not\varrho \, a).$$

Relace ϱ na A se nazývá **antisymetrická**, je-li splněno $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq \Delta_A$, tedy platí-li

$$(\forall a, b \in A)(a \, \varrho \, b \;\&\; b \, \varrho \, a \implies a = b).$$

Relace ϱ na A se nazývá **tranzitivní**, je-li splněno $\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$, tedy platí-li

$$(\forall a, b, c \in A)(a \, \varrho \, b \;\&\; b \, \varrho \, c \implies a \, \varrho \, c).$$

Relace θ na množině A, která je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá **ekvivalence** na A. Jsou-li prvky $a, b \in A$ takové, že $a \, \theta \, b$, říkáme, že prvek a je ekvivalentní prvku b podle θ.

Příklad. Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Definujme relaci $\ker f$ na A předpisem:

$$(\forall a, b \in A)((a, b) \in \ker f \iff f(a) = f(b)).$$

Pak $\ker f$ je ekvivalence na A a nazývá se **jádro** zobrazení f.

Pro libovolnou množinu A je diagonální relace Δ_A nejmenší ekvivalence na A a univerzální relace $A \times A$ je největší ekvivalence na A.

Buď A množina. Připomeňme, že podmnožiny $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$ chápeme jako soubory podmnožin množiny A a že pro každý takový soubor $\mathcal{Q}$ značíme krátce $\bigcup \mathcal{Q}$ sjednocení souboru $\mathcal{Q}$, to znamená sjednocení všech podmnožin $X \subseteq A$, které jsou prvky souboru $\mathcal{Q}$.

Buď A množina a buď $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ libovolný soubor podmnožin množiny A splňující podmínky:

$$\emptyset \notin \mathcal{R},$$
$$(\forall X, Y \in \mathcal{R})(X \neq Y \implies X \cap Y = \emptyset),$$
$$\bigcup \mathcal{R} = A.$$

Pak $\mathcal{R}$ se nazývá **rozklad** množiny A. Množiny, jež jsou prvky $\mathcal{R}$ se nazývají **třídy rozkladu** $\mathcal{R}$. Názorně řečeno, rozklad $\mathcal{R}$ reprezentuje rozdělení množiny A na soubor neprázdných vzájemně disjunktních tříd.

Příklad. Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pro libovolný prvek $b \in f(A)$ definujme množinu

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid b = f(a)\}.$$

Pak soubor množin

$$\{f^{-1}(b) \mid b \in f(A)\}$$

tvoří rozklad množiny A. Říkáme, že jde o rozklad množiny A **indukovaný** zobrazením f.

Pro libovolnou množinu A jsou soubory množin $\{\{a\} \mid a \in A\}$ a $\{A\}$ rozklady množiny A.

Buď θ ekvivalence na množině A. Pro každý prvek $a \in A$ definujeme množinu

$$[a]\theta = \{b \in A \mid a\,\theta\,b\}.$$

Tato množina se nazývá **třída ekvivalence** θ určená prvkem a.

Tvrzení. Buď θ ekvivalence na množině A. Pak pro kterékoliv dva prvky $a, b \in A$ platí:

$$\begin{aligned}
&a \in [a]\theta,\\
&[a]\theta \cap [b]\theta \neq \emptyset \iff [a]\theta = [b]\theta \iff a\,\theta\,b.
\end{aligned}$$

Důkaz. Pokud jde o první řádek, poněvadž θ je reflexivní, je $a\,\theta\,a$, takže $a \in [a]\theta$. Dokážeme dále ekvivalenci tří podmínek uvedených na druhém řádku.

Nechť nejprve $[a]\theta \cap [b]\theta \neq \emptyset$. Pak existuje $c \in [a]\theta \cap [b]\theta$, takže máme $a\,\theta\,c$ a $b\,\theta\,c$. Ze symetrie θ pak plyne také $c\,\theta\,b$ a z tranzitivity θ odtud plyne $a\,\theta\,b$.

Nechť dále $a\,\theta\,b$. Pak ze symetrie θ plyne také $b\,\theta\,a$. Ukážeme, že odtud vyplývá inkluze $[a]\theta \subseteq [b]\theta$. Nechť $d \in [a]\theta$. Pak máme $a\,\theta\,d$ a opět z tranzitivity θ dostáváme $b\,\theta\,d$, takže $d \in [b]\theta$. Analogicky se ověří inkluze $[b]\theta \subseteq [a]\theta$, takže celkem platí rovnost $[a]\theta = [b]\theta$.

Konečně je-li $[a]\theta = [b]\theta$, pak ovšem $[a]\theta \cap [b]\theta \neq \emptyset$, neboť obě tyto třídy jsou neprázdné. Jsou tedy uvedené tři podmínky navzájem ekvivalentní.

Z právě dokázaného tvrzení je vidět, že soubor množin

$$A/\theta = \big\{ [a]\theta \mid a \in A \big\}$$

tvoří rozklad množiny A. Mluvíme o rozkladu podle ekvivalence θ, nebo též o **faktorové množině** ekvivalence θ na A. Volně řečeno, pořídili jsme rozklad množiny A na třídy prvků vzájemně ekvivalentních podle θ.

Poznamenejme, že faktorová množina A/Δ_A je rovna rozkladu $\{\{a\} \mid a \in A\}$ a faktorová množina $A \,/\, A{\times}A$ je rovna rozkladu $\{A\}$.

Příklad. Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pak faktorová množina $A/\ker f$ je právě výše popsaný rozklad množiny A indukovaný zobrazením f. Navíc pro obraz $f(A)$ při tomto zobrazení platí

$$f(A) \cong A/\ker f.$$

Skutečně je vidět, že zobrazení

$$\zeta \;:\; A/\ker f \to f(A)$$

dané pro každé $a \in A$ předpisem

$$\zeta\big([a]\ker f\big) = f(a)$$

je korektně definováno, neboť pro každá $a, b \in A$ platí

$$[a]\ker f = [b]\ker f \iff f(a) = f(b),$$

a z téhož důvodu je ζ také bijekce uvedených dvou množin.

Buď nyní $\mathcal{R}$ rozklad množiny A. Definujeme relaci $\equiv_{\mathcal{R}}$ na množině A předpisem

$$(\forall a, b \in A)(a \equiv_{\mathcal{R}} b \iff (\exists\, X \in \mathcal{R})(a, b \in X)).$$

Pak z toho, že $\mathcal{R}$ je rozklad množiny A, bezprostředně plyne, že $\equiv_{\mathcal{R}}$ je ekvivalence na A. Názorně řečeno, tuto ekvivalenci jsme pořídili tak, že dva prvky $a, b \in A$ jsou ekvivalentní podle $\equiv_{\mathcal{R}}$ právě když leží ve stejné třídě rozkladu $\mathcal{R}$. Mluvíme o ekvivalenci na A příslušné rozkladu $\mathcal{R}$.

Ukážeme, že popsaná korespondence mezi ekvivalencemi na množině A a rozklady množiny A je vzájemně jednoznačná. Označme $\mathcal{E}(A)$ množinu všech ekvivalencí na A a $\Pi(A)$ množinu všech rozkladů množiny A.

Věta. Buď A množina. Pak zobrazení

$$\varphi : \mathcal{E}(A) \to \Pi(A)$$

dané pro každou ekvivalenci θ na A předpisem

$$\varphi(\theta) = A/\theta$$

a zobrazení

$$\psi : \Pi(A) \to \mathcal{E}(A)$$

dané pro každý rozklad $\mathcal{R}$ množiny A předpisem

$$\psi(\mathcal{R}) = \equiv_{\mathcal{R}}$$

jsou vzájemně inverzní bijekce množin $\mathcal{E}(A)$ a $\Pi(A)$.

Důkaz. Podle první věty z kapitoly o zobrazeních stačí ověřit, že platí rovnosti

$$\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{E}(A)} \ \text{ a } \ \varphi \circ \psi = id_{\Pi(A)}.$$

K ověření těchto rovností se ovšem stačí přesvědčit, že pro libovolnou ekvivalenci θ na A a pro libovolný rozklad $\mathcal{R}$ množiny A platí

$$\equiv_{A/\theta} = \theta \ \text{ a } \ A/{\equiv_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}.$$

Obojí jsou ale jednoduchá cvičení.

Konstrukce racionálních čísel

Ukážeme, jak s pomocí ekvivalencí a rozkladů lze z množiny

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

všech přirozených čísel a z množiny

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

všech celých čísel sestrojit množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel. Racionální čísla jsou zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Přitom pro libovolná $p, s \in \mathbb{Z}$ a $q, t \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \iff p{\cdot}t = s{\cdot}q,$$

kde $p{\cdot}t, s{\cdot}q \in \mathbb{Z}$. To vede k myšlence definovat na množině $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ relaci $\approx$ následovně. Pro libovolná $p, s \in \mathbb{Z}$ a $q, t \in \mathbb{N}$ klademe

$$(p, q) \approx (s, t) \iff p{\cdot}t = s{\cdot}q.$$

Snadno se lze přesvědčit, že pak $\approx$ je ekvivalence na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Vzniká faktorová množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$. Přitom z použité definice relace $\approx$ plyne, že zobrazení

$$\xi \, : \, \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$$

dané pro každá $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ předpisem

$$\xi\left(\frac{p}{q}\right) = [(p, q)]\approx$$

je korektně definováno a je to bijekce mezi množinami $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$. Nabízí se tedy možnost konstruovat množinu $\mathbb{Q}$ tak, že ji položíme přímo rovnu faktorové množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx$.