Princip inkluze a exkluze

Uvažujme následující situaci. Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí. Problém, který zkoumáme, spočívá v tom, jak určit, kolik je objektů nemajících žádnou z uvedených vlastností. Jestliže pro každé $i \in I$ označíme A_i množinu všech těch objektů z Q, které mají vlastnost s indexem i, pak jde o to, jak zjistit, kolik prvků má množina $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$. Této otázky se týká následující věta.

Pro libovolnou konečnou množinu M značíme $|M|$ počet prvků množiny M.

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$. Potom pro množinu $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$ platí

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|.$$

Poznámka. Poněvadž $A_i \subseteq Q$ pro $i \in I$, v souladu s tím, co bylo uvedeno v úvodní kapitole o množinách, zde klademe

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = Q.$$

Důkaz. Postupujeme indukcí vzhledem k počtu prvků indexové množiny I. Je-li $I = \emptyset$, pak $A(0) = Q$ a dokazovaná rovnost plyne z rovnosti v předchozí poznámce. Předpokládejme tedy, že $I \neq \emptyset$. Zvolme pevně index $\ell \in I$. Pak máme

$$A(0) = \Big(Q - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} A_i\Big) \; - \; A_\ell$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigl(Q - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} A_i\Bigr) \; - \; A_\ell \cap \Bigl(Q - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} A_i\Bigr) \\
&= \Bigl(Q - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} A_i\Bigr) \; - \; \Bigl(A_\ell - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} (A_\ell \cap A_i)\Bigr).
\end{aligned}
$$

Přitom zřejmě

$$
\Bigl(A_\ell - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} (A_\ell \cap A_i)\Bigr) \subseteq \Bigl(Q - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} A_i\Bigr).
$$

Podle indukčního předpokladu aplikovaného na soubor podmnožin A_i, kde $i \in I - \{\ell\}$, množiny Q pak máme

$$
\left| Q - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} A_i \right| = \sum_{K \subseteq I - \{\ell\}} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|
$$

a podle téhož indukčního předpokladu aplikovaného na soubor podmnožin $A_\ell \cap A_i$, kde $i \in I - \{\ell\}$, množiny A_ℓ dále máme

$$
\begin{aligned}
\left| A_\ell - \bigcup_{i \in I - \{\ell\}} (A_\ell \cap A_i) \right| &= \sum_{K \subseteq I - \{\ell\}} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} (A_\ell \cap A_i) \right| \\
&= \sum_{\{\ell\} \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K|-1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|.
\end{aligned}
$$

Z těchto rovností a z předchozích množinových vztahů potom plyne

$$
\begin{aligned}
|A(0)| &= \sum_{K \subseteq I - \{\ell\}} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| \; - \sum_{\{\ell\} \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K|-1} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| \\
&= \sum_{K \subseteq I - \{\ell\}} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| \; + \sum_{\{\ell\} \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| \\
&= \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|.
\end{aligned}
$$

Jiné ověření vztahu v předchozí větě by bylo možno vést prostřednictvím výpočtu, kolikrát je jeden každý objekt z Q započítán v sumě napravo. Přitom se rozliší objekty, které žádnou z uvažovaných vlastností nemají, od objektů ostatních a aplikuje se druhý z důsledků binomické věty uvedených v předchozí kapitole.

Vztah dokázaný v předchozí větě je možno názorněji přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\Big|Q-\bigcup_{i\in I}A_i\Big| = |Q| - \sum_{i\in I}|A_i| + \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq I\\ i\neq j}}|A_i\cap A_j| \\ - \sum_{\substack{\{i,j,k\}\subseteq I\\ i\neq j\neq k\neq i}}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^{|I|}\cdot\Big|\bigcap_{i\in I}A_i\Big|.\end{aligned}$$

Tento vztah kvůli střídání znamének bývá právě označován termínem **princip inkluze a exkluze**. Jeho význam spočívá v tom, že převádí obtížný problém určit počet objektů na levé straně uvedené rovnosti na obvykle snazší problémy určit jednotlivé počty objektů na pravé straně této rovnosti. Použití principu inkluze a exkluze bude ilustrováno v následujících příkladech.

Příklad. Nechť $n, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ splňují $k \le n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g : S \to U$.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu všech možných zobrazení $f : S \to U$. Indexovou množinu I položíme rovnu U. Pro každý prvek $w \in U$ budeme u zobrazení $f : S \to U$ sledovat vlastnost spočívající v tom, že prvek w se neobjeví v obraze $f(S)$. To tedy znamená, že pro každé $w \in U$ máme $A_w = \{f : S \to U \mid w \notin f(S)\}$. Množinu $A(0)$ pak tvoří ta zobrazení $g : S \to U$, pro něž $g(S) = U$, tedy právě surjektivní zobrazení. Podle principu inkluze a exkluze pak máme

$$|A(0)| = \sum_{V \subseteq U} (-1)^{|V|} \cdot \left| \bigcap_{w \in V} A_w \right|.$$

Množina $\bigcap_{w \in V} A_w$ přitom pozůstává ze všech těch zobrazení $f : S \to U$, pro něž $f(S) \subseteq U - V$, tedy ze všech možných zobrazení množiny S do množiny $U - V$. Podle tvrzení o počtu variací s opakováním tak dostáváme

$$\left| \bigcap_{w \in V} A_w \right| = (k - |V|)^n.$$

Dosazením do předchozí rovnosti odtud plyne, že

$$|A(0)| = \sum_{V \subseteq U} (-1)^{|V|} \cdot (k - |V|)^n.$$

Vidíme, že jednotliví sčítanci v poslední sumě nezávisí zcela na V, ale pouze na $|V|$. Přitom pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ podle tvrzení o počtu kombinací platí, že počet těch sčítanců, v nichž $|V| = j$, čili počet těch podmnožin $V \subseteq U$, pro něž $|V| = j$, je roven číslu $\binom{k}{j}$. Je tedy možné předchozí sumu částečně sečíst, čímž nakonec vychází

$$|A(0)| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k - j)^n.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, tedy variace n-té třídy v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$, můžeme způsobem popsaným v předchozí kapitole chápat také jako prostá zobrazení, a tudíž jako bijekce $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je **pevný bod** takto zadané permutace σ, platí-li, že $\sigma(i) = i$.

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Je třeba určit, kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které nemají ani jeden pevný bod.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu všech možných permutací $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. Tato množina se obvykle značí symbolem S_n. Jako indexovou množinu I vezmeme množinu $\{1, 2, \dots, n\}$. Pro každé číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ budeme u zmíněných permutací σ sledovat vlastnost spočívající v tom, že číslo i je pevným bodem permutace σ. To znamená, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Množina $A(0)$ potom pozůstává právě z těch permutací $\sigma \in S_n$, které nemají žádný pevný bod. Podle principu inkluze a exkluze pak máme

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Přitom množinu $\bigcap_{i \in K} A_i$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž každé číslo z K je pevným bodem. Jedná se tedy vlastně o permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\} - K$. To ovšem znamená, že máme

$$\left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| = (n - |K|)! \, .$$

Dosazením tohoto poznatku do předchozí rovnosti dostáváme

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|K|} \cdot (n - |K|)! \, .$$

Jednotliví sčítanci v této sumě opět nezávisí plně na K, ale pouze na $|K|$. Přitom pro každé $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ je počet těch sčítanců, v nichž $|K| = \ell$, roven $\binom{n}{\ell}$. Je tedy možno uvedenou sumu částečně sečíst, čímž vychází

$$\begin{aligned} |A(0)| &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \cdot \binom{n}{\ell} \cdot (n - \ell)! \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \cdot \frac{n!}{\ell!} \, , \end{aligned}$$

takže dostáváme

$$|A(0)| = n! \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}\,.$$

Rozepíšeme-li tento vztah podrobněji, nakonec obdržíme

$$|A(0)| = n! \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{\ell!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)}_{\to \frac{1}{e} \quad \text{pro} \quad n \to \infty}.$$

To znamená, že při velkých číslech n se pravděpodobnost, že náhodně vybraná permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nebude mít žádný pevný bod, blíží k hodnotě $\frac{1}{e}$.