Relace

Základní konstrukční jednotkou při tvorbě kartézských součinů množin a relací mezi množinami je pojem **uspořádané dvojice** prvků. Intuitivně mu rozumíme tak, že každým dvěma prvkům a, b přiřadíme nový objekt (a, b), nazývaný uspořádanou dvojicí, v němž záleží na pořadí prvků a, b. Obecněji pro každé $k \geq 2$ lze zavést představu **uspořádané k-tice** prvků tak, že každým k prvkům $a_1, \ldots, a_k$ přiřadíme nový objekt $(a_1, \ldots, a_k)$, jejich uspořádanou k-tici, s vyznačeným pořadím těchto prvků. Chceme-li tyto nové objekty vytvářet jen s použitím množin, můžeme použít následující definici. Uspořádanou dvojicí prvků s první složkou a a druhou složkou b rozumíme množinu

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Je jasné, že pak pro libovolné prvky a, b, c, d platí

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ \& \ b = d.$$

Dále s použitím indukce můžeme definovat uspořádanou k-tici prvků se složkami $a_1, \ldots, a_k$ například následovně. Pro $k = 2$ jsme tak již učinili, a je-li $k \geq 3$, klademe

$$(a_1, \ldots, a_k) = ((a_1, \ldots, a_{k-1}), a_k),$$

kde používáme indukční předpoklad, tedy fakt, že pro $k - 1$ jsme tento objekt již zavedli, a dále použijeme ještě jednou předchozí konstrukci uspořádané dvojice. Opět pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ platí

$$(a_1, \ldots, a_k) = (b_1, \ldots, b_k) \iff a_1 = b_1 \ \& \ \ldots \ \& \ a_k = b_k.$$

Nyní pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **kartézský součin** $A \times B$ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$. To znamená, že klademe

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Je-li $A = B$, nazýváme množinu $A \times A$ **kartézským čtvercem** množiny A a značíme ji A^2. Z uvedené definice je jasné, že množiny $A \times B$ a $B \times A$ jsou obecně různé. Dále pro libovolné množiny A, B, C také množiny

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\},$$
$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\}$$

jsou formálně různé. Nicméně rozdíl mezi objekty $((a, b), c)$ a $(a, (b, c))$ se často přehlíží — obojí lze vnímat jako uspořádanou trojici — a lze tedy mluvit prostě jen o kartézském součinu $A \times B \times C$. Takže máme

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\}.$$

Podobně pro každé $k \geq 2$ a libovolné množiny $A_1, \dots, A_k$ definujeme jejich **kartézský součin** $A_1 \times \cdots \times A_k$ jako množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1 \ \& \ \dots \ \& \ a_k \in A_k\}.$$

Vezmeme-li v úvahu předchozí induktivní konstrukci uspořádaných k-tic, znamená to vlastně, že jsme kartézský součin $A_1 \times \cdots \times A_k$ definovali jako součin $(\dots(A_1 \times A_2) \times \dots) \times A_k$, tedy s uzávorkováním odleva. Jestliže $A_1 = \cdots = A_k = A$, dostáváme tak definici **kartézské mocniny** A^k pro všechna $k \geq 2$. Navíc klademe také $A^1 = A$ a z důvodů, které budou vysvětleny později, definujeme ještě A^0 jako mmnožinu $\{\emptyset\}$.

Platí řada jednoduchých rovností:

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$$
$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

Analogické rovnosti platí i pro $C \times (A \cup B)$, $C \times (A \cap B)$ a $C \times (A - B)$.

Důkaz všech rovností je snadný.

Tvrzení. Pro libovolnou množinu C, pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor množin A_i, kde $i \in I$, platí:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \times C = \bigcup_{i \in I} (A_i \times C),$$
$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \times C = \bigcap_{i \in I} (A_i \times C).$$

Důkaz je analogický jako pro systém dvou množin.

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak libovolná podmnožina ϱ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **relace mezi množinami** A a B. Jsou-li $a \in A$, $b \in B$ takové prvky, že $(a, b) \in \varrho$, pak říkáme, že prvek a je v relaci ϱ s prvkem b, a zapisujeme to zpravidla ve tvaru $a \, \varrho \, b$. Jestliže $(a, b) \notin \varrho$, píšeme obvykle $a \not\varrho \, b$.

Příklad. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ potenční množina množiny A. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou podmnožiny $X \subseteq A$. Definujme podmnožinu $\varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$ takto:

$$\varrho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}.$$

Pak ϱ je relace mezi množinami A a $\mathcal{P}(A)$.

Nechť A, B jsou opět libovolné množiny. Pak $\emptyset \subseteq A \times B$, takže $\emptyset$ je relace mezi množinami A a B a nazývá se **prázdná relace** mezi A a B. Rovněž celá množina $A \times B$ je relací mezi množinami A a B a nazývá se **univerzální relace** mezi A a B. Nechť dále $\varrho \subseteq A \times B$ je libovolná relace mezi A a B. Pak **definičním oborem** $\operatorname{Dom} \varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\operatorname{Dom} \varrho = \{a \in A \mid (\exists b \in B)(a \, \varrho \, b)\},$$

tedy množinu všech těch prvků z A, které jsou v relaci ϱ alespoň s jedním prvkem z B, a **oborem hodnot** $\operatorname{Im} \varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\operatorname{Im} \varrho = \{b \in B \mid (\exists a \in A)(a \,\varrho\, b)\},$$

tedy množinu všech těch prvků z B, s nimiž je v relaci ϱ alespoň jeden prvek z A.

Definujeme **skládání relací**. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$ a $\eta \subseteq B \times C$ jsou relace. V této situaci definujeme relaci $\eta \circ \varrho \subseteq A \times C$ vzniklou složením relací ϱ a η následujícím způsobem:

$$\eta \circ \varrho = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b \in B)(a \,\varrho\, b \;\;\&\;\; b \,\eta\, c)\}.$$

Zápis $\eta \circ \varrho$ čteme „η po ϱ”.

Příklad. Buď A množina. Uvažme opět její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou všechny podmnožiny $X \subseteq A$. Uvažme dále potenční množinu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Prvky množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ jsou libovolné podmnožiny $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Takové podmnožiny $\mathcal{Q}$ ale nejsou nic jiného než soubory některých podmnožin $X \subseteq A$. Pro každý takový soubor $\mathcal{Q}$ označme stručně $\bigcup \mathcal{Q}$ sjednocení souboru $\mathcal{Q}$, to znamená sjednocení všech těch podmnožin $X \subseteq A$, které jsou prvky souboru $\mathcal{Q}$.

V minulém příkladu jsme definovali relaci $\varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$ předpisem:

$$\varrho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}.$$

Definujme podobně relaci $\eta \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ předpisem:

$$\eta = \{(X, \mathcal{Q}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid X \in \mathcal{Q}\}.$$

Pak složená relace $\eta \circ \varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ má podle předchozí definice tvar:

$$\eta \circ \varrho = \{(a, \mathcal{Q}) \in A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid (\exists X \in \mathcal{P}(A))(a \in X \;\&\; X \in \mathcal{Q})\},$$

což podle definice sjednocení $\bigcup \mathcal{Q}$ znamená, že tato relace je dána předpisem:

$$\eta \circ \varrho = \{(a, \mathcal{Q}) \in A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid a \in \bigcup \mathcal{Q}\}.$$

Skládání relací je asociativní:

Tvrzení. Nechť A, B, C, D jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$, $\mu \subseteq C \times D$ jsou relace. Pak platí:

$$(\mu \circ \eta) \circ \varrho = \mu \circ (\eta \circ \varrho).$$

Důkaz. Na obou stranách této rovnosti jsou relace mezi množinami A a D. Dokážeme inkluzi $(\mu \circ \eta) \circ \varrho \subseteq \mu \circ (\eta \circ \varrho)$. Nechť tedy $a \in A$, $d \in D$ jsou takové prvky, že $(a, d) \in (\mu \circ \eta) \circ \varrho$. Pak podle definice skládání relací existuje prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in \varrho$ a $(b, d) \in \mu \circ \eta$. Opět podle téže definice existuje prvek $c \in C$ takový, že $(b, c) \in \eta$ a $(c, d) \in \mu$. Pak ovšem $(a, c) \in \eta \circ \varrho$, takže $(a, d) \in \mu \circ (\eta \circ \varrho)$. Opačná inkluze $\mu \circ (\eta \circ \varrho) \subseteq (\mu \circ \eta) \circ \varrho$ se dokáže analogicky.

Ke každé relaci ϱ mezi množinami A a B definujeme **inverzní relaci** ϱ^{-1} mezi množinami B a A následovně:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid a \, \varrho \, b\}.$$

To znamená, že platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \, \varrho \, b \iff b \, \varrho^{-1} a).$$

Odtud okamžitě plyne, že $\operatorname{Dom} \varrho^{-1} = \operatorname{Im} \varrho$, $\operatorname{Im} \varrho^{-1} = \operatorname{Dom} \varrho$. Dále je jasné, že platí

$$(\varrho^{-1})^{-1} = \varrho.$$

Navíc mezi skládáním relací a inverzními relacemi existuje následující souvislost:

Tvrzení. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$ jsou relace. Pak platí:

$$(\eta \circ \varrho)^{-1} = \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}.$$

Důkaz. Na obou stranách této rovnosti jsou relace mezi množinami C a A. Dokážeme inkluzi $(\eta \circ \varrho)^{-1} \subseteq \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}$. Nechť $a \in A$, $c \in C$ jsou takové prvky, že $(c, a) \in (\eta \circ \varrho)^{-1}$. Pak $(a, c) \in \eta \circ \varrho$. To znamená, že existuje prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in \varrho$ a $(b, c) \in \eta$. Odtud plyne, že $(b, a) \in \varrho^{-1}$ a $(c, b) \in \eta^{-1}$, takže pak $(c, a) \in \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}$. Opačná inkluze $\varrho^{-1} \circ \eta^{-1} \subseteq \eta \circ \varrho)^{-1}$ se dokáže obdobně obráceným postupem.