Uspořádané množiny

Každá relace μ na množině A, která je současně reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá (**částečné**) **uspořádání** na A. Dvojice (A, μ) se pak nazývá (**částečně**) **uspořádaná množina**.

Je-li μ uspořádání na A takové, že navíc platí

$$(\forall a, b \in A)(a \,\mu\, b \;\vee\; b \,\mu\, a),$$

pak μ se nazývá **úplné** nebo též **lineární** uspořádání na A a dvojice (A, μ) se pak nazývá úplně nebo lineárně uspořádaná množina nebo též **řetězec**.

Relace uspořádání na A se obvykle značí symbolem $\leq$. Jsou-li $a, b \in A$ takové prvky, že $a \leq b$, čteme to „a je menší nebo rovno b”. Jsou-li $a, b \in A$ takové prvky, že platí současně $a \leq b$ a $a \neq b$, užíváme označení $a < b$ a čteme je „a je menší než b”.

Množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ všech přirozených, celých, racionálních a reálných čísel s obvyklým uspořádáním podle velikosti jsou úplně uspořádané množiny.

Příklad. Na množině

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

všech nezáporných celých čísel definujeme relaci $|$, nazývanou **relace dělitelnosti**, následujícím předpisem:

$$(\forall m, n \in \omega)(m \,|\, n \iff (\exists k \in \omega)(n = m \cdot k)).$$

Jsou-li $m, n \in \omega$ taková čísla, že $m \,|\, n$, říkáme, že m **dělí** n. Pak relace dělitelnosti $|$ je uspořádání na množině ω, takže $(\omega, |\,)$ je uspořádaná množina, není to ale úplně uspořádaná množina.

Příklad. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ potenční množina množiny A. Připomeňme, že prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou všechny podmnožiny X množiny A. Pak množinová inkluze $\subseteq$ uvažovaná v rámci podmnožin X množiny A je uspořádání na množině $\mathcal{P}(A)$. Je tedy $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je uspořádaná množina, ale obecně to není úplně uspořádaná množina.

Pro libovolnou množinu A je diagonální relace Δ_A uspořádání na A. Uspořádaná množina (A, Δ_A) se nazývá **protiřetězec**.

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že prvky $a, b \in A$ jsou **srovnatelné**, platí-li $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Řekneme, že prvky $a, b \in A$ jsou **nesrovnatelné**, jestliže neplatí ani $a \leq b$ ani $b \leq a$. Pro tuto skutečnost užíváme označení $a \,||\, b$. Zřejmě řetězce jsou právě ty uspořádané množiny, v nichž kterékoliv dva prvky jsou srovnatelné. V protiřetězcích naopak každé dva navzájem různé prvky jsou nesrovnatelné.

Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, tedy je-li $\leq$ uspořádání na množině A, a je-li dále $B \subseteq A$ jakákliv podmnožina, pak průnik relace $\leq$ s kartézským součinem $B \times B$ je relací na množině B a je to opět uspořádání, tentokrát ovšem na B. Mluvíme o uspořádání na B, které je **indukováno** uspořádáním $\leq$. Příslušnou takto vzniklou uspořádanou množinu značíme jednoduše $(B, \leq)$.

Příklad. Vezměme množinu

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

všech přirozených čísel a zvolme libovolné číslo $k \in \mathbb{N}$. Označme

$$\mathbb{N}(k) = \{\ell \in \mathbb{N} \mid \ \ell | k\}$$

množinu všech těch přirozených čísel, která dělí číslo k. Pak máme $\mathbb{N}(k) \subseteq \mathbb{N} \subseteq \omega$ a můžeme uvažovat uspořádanou množinu $(\mathbb{N}(k), \,|\,)$ s uspořádáním relací dělitelnosti indukovaným z celé uspořádáné množiny $(\omega, \,|\,)$.

Řekneme, že v uspořádané množině $(A, \leq)$ prvek $b \in A$ **pokrývá** prvek $a \in A$, jestliže $a < b$ a přitom neeexistuje žádný prvek $c \in A$, pro který by platilo $a < c$ a $c < b$.

Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ můžeme, zejména je-li množina A konečná, znázornit graficky následujícím způsobem. Prvky z A znázorníme jako body v rovině tak, aby pro kterékoliv dva prvky $a, b \in A$ splňující $a < b$ platilo, že bod b leží výše než bod a. To je možné, poněvadž uspořádání je antisymetrická relace. Dále ty dvojice bodů $a, b \in A$ splňujících $a < b$, kde prvek b pokrývá prvek a, pospojujeme úsečkami. Graf, který takto vznikne, se nazývá **hasseovský diagram** uspořádané množiny $(A, \leq)$. Je jasné, že je-li množina A konečná, pak původní uspořádání $\leq$ je možno z tohoto diagramu zpětně zrekonstruovat. To plyne z tranzitivity a také z reflexivity uspořádání. Je tedy možno konečnou uspořádanou množinu zadat jejím hasseovským diagramem.

Příklad. Je možné kreslit hasseovské diagramy uspořádaných množin $(\mathbb{N}(k), \mid)$ pro malá přirozená čísla k.

Příklad. Je možné kreslit hasseovské diagramy uspořádaných množin $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ pro konečné množiny A obashující malý počet prvků.

Je-li $\leq$ uspořádání na množině A, pak inverzní relace $\leq^{-1}$ je rovněž uspořádání na A a toto uspořádání obvykle značíme symbolem $\geq$. Příslušná uspořádaná množina $(A, \geq)$ se pak nazývá **duálně uspořádaná** k množině $(A, \leq)$. Je-li množina A konečná, potom hasseovský diagram uspořádané množiny $(A, \geq)$ vznikne překlopením hasseovského diagramu množiny $(A, \leq)$ „vzhůru nohama".

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Prvek $a \in A$ se nazývá **nejmenší** prvek v $(A, \leq)$, je-li pro každé $x \in A$ splněno $a \leq x$. Prvek $a \in A$ se nazývá **minimální** prvek v $(A, \leq)$, neexistuje-li prvek $x \in A$ splňující $x < a$, tedy je-li pro každé $x \in A$ splněno $a \leq x$ nebo $a \,||\, x$. Analogicky se definuje, co jsou **největší** prvek a **maximální** prvek v A.

Jiným způsobem řečeno, uvážíme-li pro danou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ k ní duálně uspořádanou množinu $(A, \geq)$, pak prvek $a \in A$ je největším prvkem v $(A, \leq)$ právě tehdy, když je nejmenším prvkem v $(A, \geq)$. Podobně prvek $a \in A$ je maximálním prvkem v $(A, \leq)$ právě tehdy, když je minimálním prvkem v $(A, \geq)$. V tomto kontextu říkáme, že se jedná o navzájem **duální pojmy**.

Z antisymetrie uspořádání plyne, že pokud v nějaké uspořádané množině existuje nejmenší prvek, pak je tento prvek jediný. V tom případě je to současně také jediný minimální prvek dané uspořádané množiny. Obecně může v uspořádané množině být minimálních prvků více anebo nemusí existovat vůbec. V úplně uspořádaných množinách ovšem pojmy nejmenšího a minimálního prvku splývají. Analogická tvrzení platí také pro největší a maximální prvky uspořádaných množin.

Příklad. V uspořádané množině $(\omega, |\,)$ je číslo 1 nejmenším prvkem a číslo 0 je největším prvkem. V uspořádané množině $(\mathbb{N}, |\,)$, kde oproti předchozímu chybí číslo 0, je číslo 1 stále nejmenším prvkem, avšak není zde největší prvek a neexistují zde ani žádné maximální prvky. V uspořádané množině $(\mathbb{N} - \{1\}, |\,)$ není nejmenší prvek a minimálními prvky jsou zde právě všechna prvočísla.

Je-li A neprázdná množina, pak v protiřetězci (A, Δ_A) jsou všechny prvky současně minimálními i maximálními prvky. Není-li přitom množina A jednoprvková, neexistují zde nejmenší ani největší prvek.

Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou dvě uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení f je **izotonní**, je-li splněna podmínka

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)).$$

Příklad. Identické zobrazení $id_{\mathbb{N}}$ na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je očividně izotonním zobrazením uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \mid)$ s uspořádáním daným dělitelností čídel na uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \leq)$ s obvyklým uspořádáním čísel podle velikosti.

Poznamenejme také, že pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je identita id_A na A izotonním zobrazením protiřetězce (A, Δ_A) na množinu $(A, \leq)$.

Nechť dále opět $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou uspořádané množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Řekneme, že zobrazení f je **izomorfismus**, jestliže f je bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní. Uvedené požadavky izotonie lze za předpokladu, že f je bijekce, vyjádřit ekvivalentní podmínkou

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \iff f(x) \sqsubseteq f(y)).$$

Volně řečeno to znamená, že obě uspořádané množiny $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou vlastně jenom dvěma kopiemi jedné a téže uspořádané množiny. O takových uspořádaných množinách říkáme, že jsou **izomorfní.**

Je vhodné si uvědomit, že požadavek, aby také inverzní zobrazení f^{-1} bylo izotonní, nelze v předchozí definici vynechat. Tak v předcházejícím příkladu je identita $id_{\mathbb{N}}$ bijekcí a izotonním zobrazením množiny $(\mathbb{N}, \mid)$ na množinu $(\mathbb{N}, \leq)$, ale tyto množiny nejsou izomorfní.

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že podmnožina $B \subseteq A$ je **hustá** v $(A, \leq)$, jestliže pro každá $x, y \in A$ splňující $x < y$ existuje $z \in B$ takové, že platí $x < z < y$.

Nechť $(A, \leq)$ je úplně uspořádaná množina, tedy řetězec, a nechť $G, H \subseteq A$ jsou neprázdné podmnožiny. Řekneme, že uspořádaná dvojice (G, H) je **řez** v množině $(A, \leq)$, platí-li následující podmínky:

$$
\begin{aligned}
&G \cup H = A,\\
&G \cap H = \emptyset,\\
&(\forall x \in G)(\forall y \in H)(x < y).
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že pak platí také podmínky:

$$
\begin{aligned}
&(\forall a \in A)(\forall x \in G)(a < x \implies a \in G),\\
&(\forall b \in A)(\forall y \in H)(y < b \implies b \in H).
\end{aligned}
$$

Ve skutečnosti je každá z těchto dvou podmínek ekvivalentní třetí ze shora uvedených podmínek.

Řez (G, H) v řetězci $(A, \leq)$ se nazývá

skok, obsahuje-li G největší prvek a H nejmenší prvek,

mezera, neobsahuje-li G největší prvek ani H nejmenší prvek,

dedekindovský řez 1. druhu, obsahuje-li G největší prvek, avšak H neobsahuje nejmenší prvek,

dedekindovský řez 2. druhu, neobsahuje-li G největší prvek, avšak H obsahuje nejmenší prvek.

Je evidentní, že při obvyklém uspořádání čísel podle velikosti je v řetězci $(\mathbb{Z}, \leq)$ každý řez skokem, zatímco v řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$ žádný skok není. V tomto řetězci ovšem pro každé $q \in \mathbb{Q}$ jsou

$$
\begin{aligned}
&\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid q < y\}\big), \text{ resp.}\\
&\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid q \leq y\}\big)
\end{aligned}
$$

dedekindovské řezy 1., resp. 2. druhu a vedle toho pro každé $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$
\big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid r < y\}\big)
$$

je mezera.

Dedekindova konstrukce reálných čísel

Ukážeme jeden ze způsobů, jak lze s pomocí množiny $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel sestrojit množinu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Označme $\mathcal{R}$ množinu všech dedekindovských řezů 1. druhu a všech mezer v řetězci $(\mathbb{Q}, \leq)$. Na množině $\mathcal{R}$ definujeme relaci $\preceq$ následujícím předpisem. Pro libovolné dva řezy $(G, H), (K, L) \in \mathcal{R}$ klademe:

$$(G, H) \preceq (K, L) \iff G \subseteq K \iff L \subseteq H.$$

Je jasné, že pak $\preceq$ je úplné uspořádání na $\mathcal{R}$, takže $(\mathcal{R}, \preceq)$ je řetězec. Lze ukázat, že pak zobrazení

$$\zeta : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$$

dané pro každé $r \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\zeta(r) = \big(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}, \{y \in \mathbb{Q} \mid r < y\}\big)$$

je izomorfismus řetězce $(\mathbb{R}, \leq)$ s obvyklým uspořádáním čísel na řetězec $(\mathcal{R}, \preceq)$. V tomto izomorfismu racionálním číslům odpovídají dedekindovské řezy 1. druhu a iracionálním číslům odpovídají mezery. Chceme-li tedy konstruovat množinu $\mathbb{R}$ pomocí $\mathbb{Q}$, nabízí se možnost položit ji přímo rovnu výše uvedené množině řezů $\mathcal{R}$.

Pak lze dokázat například následující fakt.

Tvrzení. Množina $\mathbb{Q}$ je hustá v řetězci $(\mathbb{R}, \leq)$.

Důkaz. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $x < y$ a nechť $\zeta(x) = (G, H)$ a $\zeta(y) = (K, L)$ jsou odpovídající řezy v $\mathcal{R}$. To znamená, že pak $(G, H) \prec (K, L)$, čili podle předchozí definice máme $L \subseteq H$, avšak $L \neq H$. Existuje tedy $z \in \mathbb{Q}$ takové, že $z \in H - L$, takže $z \in H \cap K$. Ve skutečnosti ale existují alespoň dvě $z, z' \in \mathbb{Q}$ splňující například $z < z'$ taková, že $z, z' \in H - L$, a tedy $z, z' \in H \cap K$. Kdyby totiž množina $H - L$ byla jednoprvková, bylo by $z \in H - L$ nejmenším prvkem množiny H, což z definice množiny řezů $\mathcal{R}$ není možné. Pro řez $\zeta(z) = (M, N)$ pak odtud plyne $L \subseteq N \subseteq H$, poněvadž $N = \{u \in \mathbb{Q} |\ z < u\}$, avšak $L \neq N \neq H$, poněvadž $z' \in N - L$ a $z \in H - N$. To ukazuje, že platí $(G, H) \prec (M, N) \prec (K, L)$, odkud zase s ohledem na izomorfismus ζ plyne $x < z < y$. Je tedy množina $\mathbb{Q}$ hustá v $(\mathbb{R}, \leq)$.