Zobrazení

Pojem „zobrazení” nejprve vymezíme následovně. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Zobrazením $f : A \to B$ množiny A do množiny B rozumíme předpis, který každému prvku $a \in A$ přiřazuje právě jeden prvek $b \in B$. Pro takové prvky pak píšeme, že $b = f(a)$, a říkáme, že b je obrazem prvku a při zobrazení f.

Uvedené vymezení daného pojmu ovšem obsahuje blíže nespecifikovaný pojem „předpis”. Abychom byli schopni se bez tohoto prostředku obejít, uvažujme k danému zobrazení $f : A \to B$ relaci $\varrho \subseteq A \times B$ definovanou formulí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \,\varrho\, b \iff b = f(a))$$

a nazývanou **graf** zobrazení f. Všimněme si, že pak relace ϱ splňuje podmínku

$$\operatorname{Dom} \varrho = A,$$

neboť zobrazení f každému prvku z A přiřazuje nějaký obraz, a dále podmínku

$$(\forall a \in A)(\forall b, b' \in B)(a \,\varrho\, b \;\&\; a \,\varrho\, b' \implies b = b'),$$

neboť zobrazení f každému prvku z A přiřazuje jediný obraz. Přitom relace ϱ zobrazení f kompletně určuje, neboť ϱ je vlastně výčtem všech uspořádaných dvojic $(a, b) \in A \times B$ takových, že $b = f(a)$.

Na druhé straně libovolnou relaci $\varrho \subseteq A \times B$ splňující výše uvedené dvě podmínky je možno chápat tímtéž způsobem jako popis určitého zobrazení f, které je pak možno zadat předpisem

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(b = f(a) \iff a \,\varrho\, b),$$

neboť ze zmíněných podmínek plyne, že pak každý prvek z A má svůj obraz a že tento obraz je jediný.

Chceme-li tedy podat definici pojmu „zobrazení” jenom s pomocí pojmů zavedených v teorii množin, nabízí se možnost přímo ztotožnit zobrazení f s jeho grafem ϱ, tak jak byl popsán výše. Tímto způsobem dostáváme následující množinovou definici daného pojmu:

Nechť A, B jsou libovolné množiny a nechť $f \subseteq A \times B$ je relace mezi nimi. Řekneme, že f je **zobrazení** množiny A do množiny B a píšeme $f : A \to B$, jestliže jsou splněny podmínky

$$\operatorname{Dom} f = A$$

a dále

$$(\forall a \in A)(\forall b, b' \in B)(a\, f\, b \ \ \&\ \ a\, f\, b' \implies b = b').$$

V tom případě, jak bylo uvedeno shora, místo zápisu $a\, f\, b$, případně $(a, b) \in f$, zpravidla píšeme $b = f(a)$.

Nechť A, B jsou množiny. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **surjekce**, nebo též **zobrazení na** množinu B, platí-li

$$\operatorname{Im} f = B.$$

Při takovém zobrazení f každý prvek $b \in B$ má alespoň jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **injekce**, nebo též **prosté zobrazení**, splňuje-li podmínku

$$(\forall b \in B)(\forall a, a' \in A)(a\, f\, b \ \ \&\ \ a'\, f\, b \implies a = a').$$

Při takovém zobrazení f každý prvek $b \in B$ má nanejvýš jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **bijekce**, nebo též **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B, je-li f současně injekce i surjekce.

Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je bijekce. Pak inverzní relace f^{-1} k relaci f je zase zobrazení. To ihned plyne z výše uvedených podmínek, neboť požadavky, aby f byla surjekce a injekce, přesně odpovídají podmínkám, které je třeba splnit, aby f^{-1} bylo zobrazení. Máme tedy zobrazení $f^{-1} : B \to A$, které samo je rovněž bijekce, neboť zase požadavky nutné k tomu, aby f bylo zobrazení, znamenají, že f^{-1} je surjekce a injekce. Říkáme, že f^{-1} je **inverzní zobrazení** k zobrazení f.

Definujeme **skládání zobrazení.** Poněvadž zobrazení jsou speciální typy relací, definujeme toto skládání stejným způsobem jako skládání relací. Je ale zřejmé, že jsou-li A, B, C množiny a jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zobrazení, pak jejich složením dostaneme relaci $g \circ f$, která je opět zobrazením $g \circ f : A \to C$. Přitom toto zobrazení je očividně dáno předpisem

$$(\forall a \in A)((g \circ f)(a) = g(f(a))).$$

Připomeňme, že skládání relací, a tedy i skládání zobrazení je asociativní.

Definujme pro libovolnou množinu A zobrazení $id_A : A \to A$ předpisem $(\forall a \in A)(id_A(a) = a)$. Toto zobrazení se nazývá **identita** na A. Je jasné, že pak pro libovolné množiny A, B a pro libovolné zobrazení $f : A \to B$ platí

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f,$$

a je-li f navíc bijekce, pak platí také

$$f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B.$$

Důležitý je následující fakt.

Věta. Nechť A, B jsou množiny a nechť

$$f : A \to B, \quad g : B \to A$$

jsou zobrazení. Pak f je bijekce s vlastností, že $f^{-1} = g$, právě tehdy, když platí $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.

Důkaz. Je-li f bijekce a je-li $g = f^{-1}$, pak samozřejmě $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.

Nechť naopak zobrazení f, g splňují $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$. Ukážeme nejprve, že f je bijekce. Nechť $b \in B$ je libovolný prvek. Položme $a = g(b)$. Pak $f(a) = f(g(b)) = id_B(b) = b$, takže vidíme, že f je surjekce. Nechť dále $a, a' \in A$ jsou takové prvky, že $f(a) = f(a')$. Pak ovšem $a = id_A(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = id_A(a') = a'$, čili $a = a'$, takže f je také injekce. Celkem f je bijekce a existuje tedy inverzní zobrazení f^{-1}, které je rovněž bijekce. Odtud pak dostáváme $g = id_A \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_B = f^{-1}$, čili $g = f^{-1}$.

Jsou-li A, B množiny a je-li $f : A \to B$ zobrazení, pak množinu $\operatorname{Im} f$ značíme rovněž $f(A)$ a nazýváme ji **obraz** při zobrazení f. Je-li dále $C \subseteq A$ libovolná podmnožina, můžeme definovat zobrazení $g : C \to B$ předpisem $(\forall c \in C)(g(c) = f(c))$. Pak toto zobrazení g se nazývá **restrinkce** nebo též **zúžení** zobrazení f na množinu C a značí se $f|_C$.

Pro libovolné dvě množiny A, B symbolem B^A značíme množinu všech zobrazení $f : A \to B$. Poznamenejme, že je-li $A = \emptyset$, pak B^A je $B^\emptyset$, a to je množina všech zobrazení $f : \emptyset \to B$. Pro takové zobrazení f ovšem máme $f \subseteq \emptyset \times B$, přičemž ale $\emptyset \times B = \emptyset$, takže nutně $f = \emptyset$ je **prázdné zobrazení**. To znamená, že $B^\emptyset = \{\emptyset\}$. Poněvadž při naší konstrukci nezáporných celých čísel bylo $0 = \emptyset$, je to důvod, proč jsme dříve definovali množinu B^0 jako $\{\emptyset\}$.

Řekneme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní**, anebo též že mají **stejnou mohutnost**, jestliže existuje bijekce $f : A \to B$. Pak píšeme $A \cong B$.

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C,$$
$$(A^B)^C \cong A^{B \times C}.$$

Důkaz. Uvažme nejprve zobrazení $p : A \times B \to A$ a $q : A \times B \to B$ daná pro libovolná $a \in A$, $b \in B$ předpisy $p(a,b) = a$ a $q(a,b) = b$. Pak zobrazení

$$\varphi : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$$

definované pro každé zobrazení $f : C \to A \times B$ předpisem

$$\varphi(f) = (p \circ f,\, q \circ f)$$

je zřejmě bijekce uvedených dvou množin.

Uvědomme si dále, že pro každé zobrazení $g : C \to A^B$ a pro každé $c \in C$ je $g(c) : B \to A$ zobrazením B do A. Nyní k libovolnému zobrazení $g : C \to A^B$ definujme zobrazení $\tilde{g} : B \times C \to A$ předpisem $\tilde{g}(b,c) = \big(g(c)\big)(b)$ pro libovolná $b \in B$, $c \in C$. Pak zobrazení

$$\psi : (A^B)^C \to A^{B \times C}$$

definované pro každé zobrazení $g : C \to A^B$ předpisem

$$\psi(g) = \tilde{g}$$

je zřejmě bijekce uvedených dvou množin.

Připomeňme, že při naší konstrukci nezáporných celých čísel jsme měli $2 = \{0,1\}$. Pro libovolnou množinu A a pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq A$ definujme **charakteristické zobrazení** $\chi_Y : A \to 2$ podmnožiny Y následovně. Pro libovolné $a \in A$ klademe

$$\chi_Y(a) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \in Y, \\ 0 & \text{pokud } a \notin Y. \end{cases}$$

Nyní jsme připraveni dokázat následující fakt.

Tvrzení. Pro libovolnou množinu A je $\mathcal{P}(A) \cong 2^A$.

Důkaz. Zobrazení

$$\vartheta : \mathcal{P}(A) \to 2^A$$

definované pro každou podmnožinu $Y \subseteq A$ předpisem

$$\vartheta(Y) = \chi_Y$$

je zřejmě bijekce uvedených dvou množin.

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \not\cong \mathcal{P}(A)$.

Důkaz. Připusťme, že existuje bijekce $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Uvažujme množinu $Y = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Pak $Y \subseteq A$, čili $Y \in \mathcal{P}(A)$. Poněvadž f je podle předpokladu bijekce, existuje jediné $y \in A$, pro něž $Y = f(y)$. Zkoumejme nyní, zda $y \in Y$ či nikoliv. Pokud $y \in Y$, pak z definice množiny Y plyne, že $y \notin f(y)$, a poněvadž $f(y) = Y$, znamená to, že $y \notin Y$, což není možné. Pokud však $y \notin Y$, pak zase z definice množiny Y plyne, že $y \in f(y)$, a poněvadž stále $f(y) = Y$, znamená to, že $y \in Y$, což opět není možné. To dává spor.

Poznamenejme, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků. Řekneme, že daná množina je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako množina ω všech nezáporných celých čísel. Každá podmnožina spočetné množiny je konečná nebo spočetná. Není těžké ukázat, že množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ všech přirozených, celých a racionálních čísel jsou všechny spočetné. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**. Z Cantorovy věty a z tvrzení, které jí předchází, tak plyne, že například množina 2^ω je nespočetná. Argumentem podobným tomu, který byl použit v předchozím důkazu, lze ukázat, že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná. Přesněji je možné ukázat, že množiny $\mathbb{R}$ a 2^ω mají stejnou mohutnost. O množinách, které mají stejnou mohutnost jako množina $\mathbb{R}$, říkáme, že mají **mohutnost kontinua**.