10 Význam a řešení úloh MIP

Předchozí neformální uvedení způsobu řešení úloh celočíselné optimalizace je v následující lekci postaveno na pevné matematické základy.

Osvojíme si pojem *celočíselné mříže*, která popisuje přípustná (celočíselná) řešení úloh MIP, a ukážeme význam konvexního obalu celočíselných řešení úlohy. Dále si popíšeme *obecné schéma metody větvení* a její implementaci pomocí mezí lineárních relaxací úlohy. Na příkladě rozvrhování si ukážeme i alternativní způsob relaxace úlohy v této metodě.

Stručný přehled lekce

- Pojem celočíselné mříže.
- Obecné schéma metody větvení.
- Implementace metody větvení pomocí lineárních relaxací coby mezí.
- Účinné postupy při volbách větvení a relaxace.
- Alternativní implementace relaxací na příkladě úlohy rozvrhování.

10.1 Celočíselná mříž

Definice: *Celočíselná mříž* v $\boldsymbol{R}^d$ (dimenze d) je množina všech bodů s celočíselnými souřadnicemi

$$\boldsymbol{M}^d = \{(z_1, \ldots, z_d) : z_1, \ldots, z_d \in \boldsymbol{Z}^d\}\,.$$

Definice: *Rozšířená celočíselná mříž* dimenze $d + r$ je množina všech bodů

$$\boldsymbol{M}^{d,r} = \{(x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_d) : (z_1, \ldots, z_d) \in \boldsymbol{M}^d,\, x_1, \ldots, x_r \in \boldsymbol{R}\}\,.$$

Je to tedy sjednocení všech disjunktních podprostorů dimenze r, jejichž posledních d souřadnic jsou fixní celočíselné hodnoty.

Fakt: Mějme úlohu IP $\mathcal{U}$ s omezenými celočíselnými proměnnými. Pak množina přípustných řešení $\mathcal{U}$ (jako podmnožina mříže $\boldsymbol{M}^d$) je konečná a její konvexní obal je polytop. Podle Věty 4.12 lze tudíž konvexní obal Q přípustných řešení úlohy $\mathcal{U}$ zapsat jako polyedr Q, na kterém pak můžeme použít běžnou lineární optimalizaci:
Jelikož řešením LP je některý krajní bod polyedru, je výsledkem lineární optimalizace na Q jedno z přípustných řešení $\mathcal{U}$.

Pozor, uvedený fakt však neznamená, že bychom rázem měli efektivní metodu řešení úloh IP, neboť v obvyklých příkladech složitost zápisu polyedru Q obrovským způsobem vzroste oproti původní úloze (oproti původnímu polyedru lineární relaxace).

Tvrzení 10.1. *Mějme úlohu MIP $\mathcal{U}$ s omezenými proměnnými. Pak konvexní obal K množiny přípustných řešení $\mathcal{U}$ (jako podmnožiny mříže $\boldsymbol{M}^{d,r}$) je polyedrem.*

Důkaz: Nechť P je (omezený) polyedr definovaný nerovnostma úlohy $\mathcal{U}$, tedy že $P \cap \boldsymbol{M}^{d,r}$ jsou přípustná řešení $\mathcal{U}$. Nechť $\vec{z}$ je vektor celočíselných proměnných. Pak díky omezenosti může $\vec{z}$ nabývat jen konečně mnoha hodnot z podmříže $\vec{z} \in M$. Z definice polyedru je $P \cap \{\vec{z} : \vec{z} = \vec{z}^1\}$ omezeným polyedrem pro každou volbu $\vec{z}^1 \in M$, tedy i polytopem s konečnou množinou vrcholů $V(\vec{z}^1)$. Položíme $V = \bigcup_{\vec{z}^1 \in M} V(\vec{z}^1)$, což je také konečná množina, a K je konvexním obalem V, tudíž je K polytopem i polyedrem.

$\square$

Poznámka: Idea hledání polyedru, který je konvexním obalem přípustných řešení úlohy MIP, stojí za obecným schématem tzv. *"cutting-plane" algoritmů* pro řešení MIP.

Základním krokem je postupné přidávání *platných nerovností* k původní formulaci úlohy, tj. přidávání takových nerovností, které nevyplývají z lineárních kombinací ostatních nerovností úlohy, ale které zachovají množinu přípustných celočíselných řešení. (Toto si lze představit jako "uříznutí" neceločíselných vrcholů polyedru.) Důležitým původním příkladem takových nerovností jsou *Gomoryho řezy*, které v konečném počtu kroků konvergují k optimálnímu řešení úlohy IP.

10.2 Obecná metoda větvení

Níže popsaná obecná metoda větvení rozšiřuje pojetí Algoritmu 9.7 na různé typy relaxací úlohy MIP, které nemusí být lineární ani nemusí být řešeny simplexovou metodou.

Definice: Nechť $\mathcal{U}$ je úlohou MIP s reálnými proměnnými $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$ a celočíselnými proměnnými $\vec{z} = (z_1, \dots, z_d)$, které patří do rozšířené celočíselné mříže $(\vec{x}, \vec{z}) \in \boldsymbol{M}^{d,r}$. Označme P množinu přípustných řešení $\mathcal{U}$. Množinu R (libovolnou) nazveme *množinou relaxovaných řešení* úlohy $\mathcal{U}$, pokud $P = R \cap \boldsymbol{M}^{d,r}$ je průnikem R s celočíselnou mříží $\boldsymbol{M}^{d,r}$.

Algoritmus 10.2. Obecná metoda větvení pro řešení úloh MIP
Mějme dánu obecnou úlohu MIP s reálnými proměnnými $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$ *a celočíselnými proměnnými* $\vec{z} = (z_1, \dots, z_d)$*, ve které je účelovou funkcí* $\max \vec{c} \cdot (\vec{x}, \vec{z})$*.*

Nechť f je globální proměnná inicializovaná $f = -\infty$ a nechť M je podmnožina celočíselné mříže obsahující všechny přípustné hodnoty $\vec{z}$.

Procedura `branch&bound`($\mathcal{U}$: úloha MIP, $M \subseteq \boldsymbol{M}^d$)

1. Pokud M má jediný prvek, pak fixujeme $\vec{z}^o \in M$ a řešíme úlohu LP $\mathcal{U} \restriction \vec{z} = \vec{z}^o$ (třeba simplexovou metodou). Vrátíme její optimální řešení `return` (x^o, z^o) .
2. Zvolíme $R \subseteq \boldsymbol{R}^{r+d}$: libovolná množina relaxovaných řešení úlohy $\mathcal{U} \restriction \vec{z} \in M$.
3. $r^o = \max\{\vec{c}\cdot\vec{t} : \vec{t} \in R\}$, $\vec{t}^o \in R : r^o = \vec{c}\cdot\vec{t}^o$ (optimální řešení relaxované úlohy).
4. Pokud $r^o \leq f$ nebo $R = \emptyset$, vrátíme se bez řešení `return` $\emptyset$.
5. Pokud $r^o = \infty$ pro nějaké příp. $\vec{z} \in M$, položíme $f = \infty$ a vrátíme `return` $\emptyset$.
6. Pokud je $\vec{t}^o \in \boldsymbol{M}^{d,r}$, tj. přípustné v $\mathcal{U}$, položíme $f = r^o$ a vratíme `return` $\vec{t}^o$.
7. [Příp. heuristicky hledáme přípustné řešení $\vec{s} \in \boldsymbol{M}^{d,r}$ "blízké" k $\vec{t}^o$.]
8. [Příp. formulaci úlohy $\mathcal{U}$ rozšíříme ("vylepšíme") na $\mathcal{U}'$ o další *platné podmínky* zjištěné z nepřípustnosti řešení $\vec{t}^o$. Zavoláme `branch&bound`($\mathcal{U}'$, M) .]
9. *Krok větvení*: S pomocí $\vec{t}^o$ nalezneme (libovolný) rozklad $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ a $M_1, M_2 \neq \emptyset$. Zavoláme rekurzivně

   $\vec{t}^1 =$ `branch&bound`($\mathcal{U}$, M_1) a $\vec{t}^2 =$ `branch&bound`($\mathcal{U}$, M_2)

   zároveň *nedeterministicky*. Vracíme lepší z obou řešení `return` $\max\ (\vec{t}^1, \vec{t}^2)$.

Body (7,8) jsou nepovinné. Návratová hodnota procedury je optimálním řešením úlohy $\mathcal{U}$ s účelovou hodnotou f.
Pokud $f = -\infty$, úloha nemá přípustné řešení, pokud $f = \infty$, úloha nemá optimální řešení z důvodu neomezenosti.

U tohoto algoritmu se jedná o velmi obecné schéma s různými možnými implementacemi. Hlavní možnost volby nám poskytuje nedeterminismus v bodě (9); a to jak při volbě rozkladu podmříže M, tak i při pořadí volání větví M_1, M_2. Dále je také možno libovolně volit implementace bodů (7,8), nebo je jednoduše neimplementovat vůbec.

Poznámka: Důležitým aspektem implementace uvedeného schématu algoritmu je způsob zpracování volaného větvení v bodě (9). Naše schéma je formulováno tak, že větvení je rekurzivním voláním, avšak to je z hlediska praktické programové implementace sice snadné, ale neefektivní. Pro vylešování implementace totiž potřebujeme mít programovou kontrolu nad pořadím a způsobem zpracování jednotlivých větví. Proto je vhodné si vytvořit vlastní datovou strukturu – úložiště nezpracovaných větví metody.

Věta 10.3. *Mějme dánu obecnou úlohu MIP $\mathcal{U}$ s omezenými celočíselnými proměnnými z konečné podmříže M. Pokud se nepoužije bod (8), nebo pokud je zabráněno jeho zacyklení, tak Algoritmus 10.2 na* `branch&bound`*($\mathcal{U}$, M) vždy skončí a nalezne optimální řešení.*

Důkaz (náznak): Důkaz jen přímočaře zobecňuje argumenty Tvrzení 9.8. Za prvé, hloubka rekurze je omezená počtem bodů $|M|$ – nejpozději v této hloubce nastane $|M| = 1$ a uplatní se bod (1). Proto je algoritmus konečný, ale délka výpočtu je až exponenciální. Optimální řešení úlohy zřejmě náleží do jedné z prohledávaných větví a jako takové bude nalezeno a vráceno. □

10.3 Metoda větvení a mezí s lin. relaxacemi

V následujícím oddíle si především vysvětlíme, jak popis konkrétního Algoritmu 9.7 (pro větvení a meze základní úlohy MIP) zapadá do rámce schématu Algoritmu 10.2.

Algoritmus 10.4. Postup větvení a mezí s lin. relaxacemi
Nechť $\mathcal{U}$ je obecná úloha MIP s omezenými celočíselnými proměnnými $\vec{z} \leq \vec{d}$.
Přirozeně položíme $M = \{\vec{z} : 0 \leq \vec{z} \leq \vec{d}\}$. Při implementaci `branch&bound`$(\mathcal{U}, M)$ postupujeme dle Algoritmu 10.2 s následujícími implementačními detaily:

- V kroku 2 za relaxovaná řešení volíme lineární relaxaci $\mathcal{U}$.
- V kroku 3 nalezneme r^o, $\vec{t^o}$ simplexovou metodou.
  Případně pokud $\mathcal{U}$ je úloha IP a M obsahuje jen málo mřížových bodů, je občas lepší přeskočit relaxaci úlohy úplně a jen dál větvit M až na jednotlivé body.
- V kroku 7 se pro neceločíselné $\vec{z}$-složky řešení $\vec{t^o}$ pokusíme získat přípustné řešení zaokrouhlením (třeba náhodným) těhcto necelých proměnných v $\vec{t^o}$.
- Větvení kroku 9 určíme takto:
  - Zvolíme libovolnou celočíselnou proměnnou z_i, která má necelou hodnotu z_i^o v $\vec{t^o}$ (z_i zde nazveme *větvící proměnnou*).
  - Definujeme

$$M_1 = M \cap \{z_i \leq \lfloor z_i^o \rfloor\} \ , \qquad M_2 = M \cap \{z_i \geq \lceil z_i^o \rceil\} \ .$$

Konkrétně *výběr větvící proměnné* je možný pro příklad následujícími postupy:

- Uživatelem specifikované priority (obvykle vycházející z povahy řešeného problému).
- Maximální *celočíselná nepřípustnost* – tam vybíráme proměnnou z_i, jejíž necelá část $(z_i^0 - \lfloor z_i^0 \rfloor)$ je nejblíže číslu 0.5.
  Ve větvení se pak doporučuje nejprve řešit větev M_1, pokud necelá část je < 0.5, jinak M_2.
- Zobecněním předchozího je volba podle *celočíselné degradace*, kdy jsou (nějak) specifikovány koeficienty p_i^+, p_i^- (mohou se měnit během výpočtu) a vybíráme proměnnou z_i s necelou hodnotou, pro kterou je maximalizováno $\min((p_i^-(z_i^0 - \lfloor z_i^0 \rfloor), p_i^+(\lceil z_i^0 \rceil - z_i^0))$.
- Jiné, chytřejší metody se v praxi obvykle ukazují jako příliš zdlouhavé.

10.4 Řešené příklady IP

Příklad 10.5. *Letecká společnost má přepravit* 141 *lidí z města A do B. K dispozici má čtyři letadla:*

	kapacita	*cena letu*	*posádka*
L1	*90*	*300*	*7*
L2	*60*	*210*	*4*
L3	*50*	*200*	*3*
L4	*33*	*130*	*2*

Která letadla má zvolit, aby dosáhla nejlevnějšího řešení?

Řešení: Řešíme tutéž úlohu, ale nyní doplníme omezení počtu členů posádky, kterých má společnost celkem k dispozici 10.

$$7z_1 + 4z_2 + 3z_3 + 2z_4 \leq 10$$

Výsledek: poletí L2, L3 a L4.

Následně doplníme další vlastnost, a to možnost použití aerotaxi s kapacitou 5 a cenou 35 (bez potřeby vlastní posádky).

$$\max \quad -300z_1 - 210z_2 - 200z_3 - 130z_4 - 35z_5$$

$$90z_1 + 60z_2 + 50z_3 + 33z_4 + 5z_5 \geq 141$$
$$7z_1 + 4z_2 + 3z_3 + 2z_4 \geq 10$$
$$z_i \in \{0, 1\}$$

Výsledek: poletí L1, L3 a aerotaxi. □

10.5 Větvení a meze trochu jinak

Příklad 10.6. *Jednotlivé nepřerušitelné rozvrhování úloh II.*

Mějme stroj, který zpracovává po jedné zadané úlohy. Každá úloha má danou prioritu, je připravena ke zpracování v určitém čase a její dokončení trvá určitou dobu. Přitom postup zpracování jedné úlohy nelze přerušit (ostatní úlohy musí čekat na její dokončení).

Vstup: Úloha J_i začne v čase t_i s délkou l_i a prioritou p_i, $i = 1, 2, \dots, n$.
Výstup: Pořadí zpracování, ve kterém úloha J_i je ukončena v čase f_i.

Cena řešení je dána souhrnem čekání na dokončení jednotlivých úloh, váženým prioritami úloh

$$\min c = \sum_{i=1}^{n} (f_i - t_i) \cdot p_i \,.$$

Řešení: Úlohu budeme řešit specifickou implementací metody větvení a mezí, přičemž jako relaxační mez nám bude sloužit řešení obdobné úlohy, ve které lze zpracování úloh libovolně přerušovat.

Jako v Příkladě **??** použijeme formulaci, kdy pořadí zpracování úloh bude určeno jednou z $n!$ permutací. Na rozdíl od běžných úloh MIP však nebudeme sestavovat soustavu lineárních nerovnic pro formulaci omezení, ale budeme kombinovat účelovou hodnotu řešení nepřerušitelného rozvrhování pro danou permuaci s relaxací úlohy přerušitelným rozvrhováním.

. . . . $\square$