4 Konvexita a mnohostěny

V této přednášce si uvedeme či zopakujeme základní matematické pojmy nutné pro pochopení a zdůvodnění principů lineární optimalizace a jejího řešení tzv. simplexovou metodou. Mimo připomenutí běžných pojmů algebry a topologie se jedná především o pojmy konvexity a mnohostěnu.

Samotný pojem mnohostěnu přitom je intuitivní v dimenzích 2 nebo 3, ale ve vyšších dimenzích již přináší netriviální komplikace.

Stručný přehled lekce

- Zopakování základních pojmů lineární algebry a topologie.
- Definice konvexity a konvexní množiny, Farkasovo lema.
- Mnohostěny a jejich vlastnosti.

4.1 Vybrané matematické pojmy

Definice některých základních pojmů lineární algebry:

- d-dimenzionální *euklidovský prostor* je vektorový prostor $\boldsymbol{R}^d$ s klasickým skalárním součinem.
- *Afinní podprostor* je vektorový podprostor posunutý o daný vektor (tj. nemusí procházet počátkem) .
- *Dimenze* podprostoru je počet prvků jeho báze. *Dimenze množiny* X je nejmenší dimenzí afinního podprostoru obsahujícího X.
- *Nadrovinou* v $\boldsymbol{R}^d$ rozumíme afinní podprostor dimenze $d-1$.
- *Poloprostor v* $\boldsymbol{R}^d$ je uzavřená podmnožina, jejíž hranicí je nadrovina, neformálními slovy množina všech bodů "na jedné straně nadroviny".
- Nechť $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$ značí *délku* vektoru $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^d$.

Nadrovina v $\boldsymbol{R}^d$ je určena lineární rovnicí $\vec{a} \cdot \vec{x} = a_1x_1 + \ldots + a_dx_d = b$.

Poloprostor v $\boldsymbol{R}^d$ je určen lineární nerovnicí $\vec{a} \cdot \vec{x} = a_1x_1 + \ldots + a_dx_d \leq b$.

Značení: Pokud H označuje nadrovinu, H^+ a H^- označuje příslušné dva poloprostory určené H (bez definovaného rozlišení, který ze dvou je H^+ a který H^-).

Definice několika běžných topologických pojmů:

- Mějme množinu $X \subseteq \boldsymbol{R}^d$. X je *omezená*, pokud existuje konstanta $k \in \boldsymbol{R}$ taková, že $\forall \vec{x} \in X$ platí $\|\vec{x}\| < k$.
- Množina $X \subseteq \boldsymbol{R}^d$ je *uzavřená*, pokud pro každou konvergentní posloupnost $(x_1, x_2, \dots) \subseteq X$ platí $(\lim_{n\to\infty} x_n) \in X$.
  (Neformálně, že "hranice X patří" do X.)
- Množina $X \subseteq \boldsymbol{R}^d$ je *otevřená*, pokud její doplněk je uzavřený.
- Funkce f se je *spojitá*, je-li vzorem otevřené množiny (tj. $f^{-1}(U)$) opět otevřená množina.
  (Neformálně pro každé dva "dostatečně blízké" body jsou si blízké i jejich funkční hodnoty.)

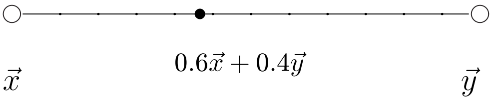
Definice 4.1. Kompaktní množina X je taková,
ve které každá nekonečná posloupnost $(x_1, x_2, \dots) \subseteq X$ má podposloupnost konvergující uvnitř X.

Věta 4.2. *Nechť $X \subseteq \boldsymbol{R}^d$.*
a) Pak X je kompaktní právě když je X omezená a uzavřená.
b) Každá spojitá funkce $f : X \to \boldsymbol{R}$ má na kompaktní množině X globální maximum i minimum.

4.2 Konvexita: definice a vlastnosti

Definice 4.3. **Konvexní kombinací** vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in R^d$ rozumíme každý vektor tvaru $\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}$, $\alpha \in \langle 1, 0 \rangle$.
(Tj. všechny body na úsečce s konci $\vec{x}$ a $\vec{y}$.)

Množina $X \subseteq \boldsymbol{R}^d$ je *konvexní*, pokud s každými dvěma body $x, y \in X$ patří do X i celá úsečka xy, tj. všechny konvexní kombinace vektorů $\vec{x}, \vec{y}$.



Obrázek 4.1: Příklad konvexní kombinace vektorů $\vec{x}, \vec{y}$.

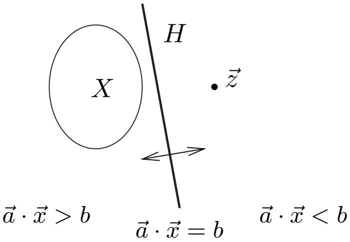
Lema 4.4. *Průnik $X \cap Y$ dvou konvexních množin X, Y je konvexní.*

Důkaz: Zcela jasné z definice konvexní množiny. $\square$

Důsledek 4.5. *Množina všech přípustných řešení úlohy LP je konvexní.*

Definice: Nechť K je konvexní množina. Bod $v \in K$ je *krajním bodem* K, pokud neexistují body $x, y \in K \setminus \{v\}$ takové, že v by bylo konvexní kombinací x a y.

Věta 4.6. *Nechť $X \subseteq \boldsymbol{R}^d$ je uzavřená a konvexní množina a $\vec{z} \in \boldsymbol{R}^d$ je bod $\vec{z} \notin X$. Pak existuje nadrovina $H \subseteq \boldsymbol{R}^d$ oddělující $\vec{z}$ od X, jinými slovy existují $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^d$, $b \in \boldsymbol{R}$ takové, že $\vec{a} \cdot \vec{z} < b$ a $\forall \vec{x} \in X$: $\vec{a} \cdot \vec{x} > b$.*



Důkaz: Nechť $\vec{x} \in X$ je libovolné a $l = \|\vec{x} - \vec{z}\|$. Pak vezmeme $X' \subseteq X$ podmnožinu všech bodů ve vzdálenosti $\leq l$ od $\vec{z}$. X' je uzavřená, omezená, tedy kompaktní, a tudíž podle Věty 4.2 má funkce vzdálenosti $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{z}\|$ minimum na X' v některém bodě $\vec{y} \in X'$ ($\vec{y}$ je bod X nejbližší k $\vec{z}$).

Za oddělující nadrovinu H vezmeme kolmou nadrovinu k úsečce yz procházející jejím středem, tj. volíme $\vec{a} = \vec{y} - \vec{z}$ a $b = \frac{\vec{y}+\vec{z}}{2} \cdot \vec{a}$. Pokud by existoval bod $\vec{t} \in X$, pro který $\vec{a} \cdot \vec{t} < b$ (tzn. $\vec{t}$ leží na stejné straně H jako $\vec{z}$), pak by i celá úsečka yt patřila do X podle definice konvexity. Jelikož však úsečka yt protíná oddělující nadrovinu H, musí na ní podle trojúhelníkové nerovnosti ležet bod bližší k $\vec{z}$ než je $\vec{y}$, a to je spor. (Uvědomte si, že zmíněný bližší bod nemusí být $\vec{t}$ samotný.) $\square$

Velmi známý důsledek předchozí věty je znám jako *Farkasovo lema*.

Důsledek 4.7. (Farkasovo lema) *Soustava lineárních rovnic $\vec{u}^T \cdot \boldsymbol{A} = \vec{c}^T$ má nezáporné řešení $\vec{u} \geq 0$ právě tehdy, když pro každé řešení soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \vec{y} \leq 0$ platí $\vec{c} \cdot \vec{y} \leq 0$.*

Důkaz $\Rightarrow$: Předpokládejme, že $\vec{u} \geq 0$ a $\vec{y}$ jsou takové, že $\vec{u}^T \cdot A = \vec{c}^T$ a $A \cdot \vec{y} \leq 0$. Potom $\vec{c} \cdot \vec{y} = (\vec{u}^T \cdot A) \cdot \vec{y} = \vec{u}^T \cdot (A \cdot \vec{y}) \leq 0$.

Důkaz $\Leftarrow$ (sporem): Předpokládejme, že $\vec{u}^T \cdot A = \vec{c}^T$ nemá nezáporné řešení. Ukážeme, že potom existuje $\vec{y}$ takové, že $A \cdot \vec{y} \leq 0$ a $\vec{c} \cdot \vec{y} > 0$. Uvažme množinu $P = \{\vec{u}^T \cdot A : \vec{u} \geq 0\}$. Množina P je zřejmě uzavřená a konvexní a platí, že $\vec{c} \notin P$. Podle Věty 4.6 existuje oddělující nadrovina mezi $\vec{c}$ a množinou P, tj. existují $\vec{a}$ a b takové, že $\vec{a} \cdot \vec{c} < b$ a zároveň $\vec{a} \cdot \vec{x} \geq b$ pro každé $\vec{x} \in P$.

Dokážeme, že lze volit $b = 0$ (tj. že naše oddělující nadrovina může procházet počátkem). Zřejmě $\vec{0} \in P$ a tedy $\vec{a} \cdot \vec{c} < 0$, protože $0 = \vec{a} \cdot \vec{0} \geq b$. Přepokládejme, že existuje $\vec{x} \in P$ takové, že $\vec{a} \cdot \vec{x} < 0$. Z definice P plyne, že pro každé $\lambda \geq 0$ platí $\lambda \cdot \vec{x} \in P$. Avšak pro dostatečně velké λ dostaneme, že $\vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{x}) < b$, neboť $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{x}) \to -\infty$ pro $\lambda \to \infty$, a tedy že P se nachází na obou stranách oddělující nadroviny, ale to je zřejmý spor. Z toho plyne, že $\vec{a} \cdot \vec{x} \geq 0$ pro každé $\vec{x} \in P$, tedy že můžeme volit $b = 0$.

Konečně zvolme $\vec{y} = -\vec{a}$. Potom $\vec{c} \cdot \vec{y} = -\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$ a zároveň $A \cdot \vec{y} = -A \cdot \vec{a} \leq 0$, což plyne dosazením jednotlivých řádků matice A za $\vec{x}$ do nerovnice $\vec{a} \cdot \vec{x} \geq b = 0$ (všechny řádkové vektory A jsou zřejmě v P). $\square$

Důsledek 4.8. (Farkasovo lema trochu jinak) *Nechť soustava* $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leq \vec{c}$, $\vec{x} \geq 0$ *nemá řešení. Pak existuje vektor* $\vec{\lambda} \geq 0$ *takový, že* $\vec{\lambda} \cdot \boldsymbol{A} \geq 0$ *a* $\vec{\lambda} \cdot \vec{c} < 0$.

Důkaz: Zřejmě soustava

$$(\boldsymbol{A}) \cdot (\vec{x}) \leq \vec{c},\ \vec{x} \geq 0$$

má řešení právě když má řešení následující soustava

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \vec{c},\ \vec{x} \geq 0,\ \vec{z} \geq 0\,.$$

Nechť $\vec{u}^{\,T} = (\vec{x}^{\,T}, \vec{z}^{\,T})$ a $\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$. Z Farkasova lematu 4.7 pro $\boldsymbol{A}'$ a $\vec{u}$ plyne, že existuje $\vec{y}$ takové, že $\boldsymbol{A}' \cdot \vec{y} \leq 0$ a $\vec{c} \cdot \vec{y} > 0$. Nyní zvolme $\vec{\lambda} = -\vec{y}^{\,T}$. Pak $\boldsymbol{A}' \cdot \vec{\lambda}^{\,T} = -\boldsymbol{A}' \cdot \vec{y} \geq 0$, což lze rozepsat jako $A^T \cdot \vec{\lambda}^{\,T} = (\vec{\lambda} \cdot A)^{\,T} \geq 0$ a navíc $\boldsymbol{I} \cdot \vec{\lambda} = \vec{\lambda} \geq 0$. Zároveň platí, že $\vec{\lambda} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{y} < 0$. $\square$

Alternativní formulace Farkasova lematu v Důsledku 4.8 má následující pěkný význam: Nemá-li soustava $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leq \vec{c}$, $\vec{x} \geq 0$ řešení, lze přímo získat nezápornou lineární kombinací řádků soustavy spor $0 \leq \vec{\lambda} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leq \vec{\lambda} \cdot \vec{c} < 0$.

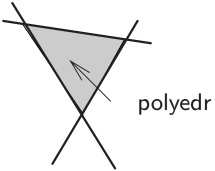
4.3 Mnohostěny

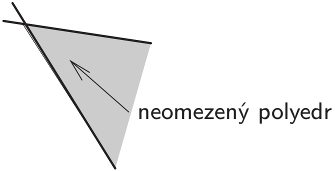
Mnohostěn lze popsat jeho *vrcholy* nebo jeho stěnami (*facetami*), ale převod mezi těmito popisy není vůbec jednoduchý a může z výpočetního hlediska vést k exponenciálnímu nárustu složitosti.

Proto se na mnohostěny budeme dívat dvěma odlišnými formálními pohledy, nejprve pohledem na jeho stěny.

Definice 4.9. Polyedr v $\boldsymbol{R}^d$ je průnikem konečně mnoha poloprostorů.
(Je to konvexní a uzavřená množina podle Lemmatu 4.4.)

Dobře si uvědomme, že z této definice vůbec nevyplývá omezenost polyedru.





Definice 4.10. **Stěna** F d-dimenzionálního polyedru P
je každá taková množina $F \subseteq P$, pro kterou existuje nadrovina H v $\boldsymbol{R}^d$ určující poloprostor H^+, že $P \subseteq H^+$ a $F = P \cap H$.

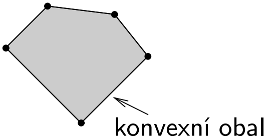
Všimněme si, že i prázdná množina může být stěnou polyedru. Obvykle se za stěnu bere navíc i celý polyedr P a pak se $\emptyset$ a celému P říká *nevlastní stěny*. Všechny stěny včetně nevlastních zřejmě tvoří svaz s nejmenším i největším prvkem, navíc se jedná u omezeného polyedru o svaz atomický (atomy jsou jednotlivé vrcholy).

Značení: *Dimenzí* stěny F přirozeně míníme afinní dimenzi množiny F. Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*, stěny dimenze 1 nazýváme *hranami* a stěny dimenze $d-1$ *facetami* d-dimenzionálního polyedru P.

Fakt: Přímo z definic plyne, že vrcholy polyedru dimenze větší než 0 jsou jeho krajními body a naopak. (Pro dimenzi 0 se o tento fakt definice rozšíří.)

Následuje druhý pohled na mnohostěny podle jejich vrcholů. Poznamenáváme, že obecně se v matematice mluví o *konvexních* mnohostěnech, ale jelikož zde uvažujeme jen konvexní množiny, tento přívlastek pro jednoduchost vynecháváme.

Definice: *Konvexním obalem* $conv(V)$ množiny $V \subseteq \boldsymbol{R}^d$ je průnik všech konvexních množin obsahujících V; tj. neformálně množina všech bodů, které lze získat z bodů V (násobnými) konvexními kombinacemi.



Definice 4.11. **Polytop** je konvexním obalem konečně mnoha bodů v $\boldsymbol{R}^d$.
(Opět se jedná o uzavřenou konvexní množinu, navíc vždy omezenou.)

Poznámka: Citovaná učebnice [**?**] nerozlišuje mezi pojmy polyedru a polytopu a používá jen slovo "polyédr" v obou našich významech. To rozhodně není matematicky přesné. My přejdeme ke zjednodušené záměně pojmů polyedru a polytopu až po důkazu následující Věty 4.12.

Ekvivalence pohledů na mnohostěny

Nakonec si ukážeme, že z matematického pohledu lze pojmy polyedru a polytopu dle potřeby zaměnit. Platí však, že složitost popisu téhož tělesa jako polytopu se může diametrálně lišit od jeho popisu coby polyedru.

Fakt: d-dimenzionální hyperkrychle má $2d$ stěn a 2^d vrcholů.

Věta 4.12. *Omezený polyedr je polytop a naopak.*

Důkaz této důležité věty bude podán následujícími tvrzeními.

Lema 4.13. *Nechť P je omezený polyedr a F jeho faceta. Pak existuje vrchol (krajní bod) v P který neleží na F.*

Důkaz: Uvědomme si, že v dimenzi 0 je tvrzení triviální – jakékoliv těleso dimenze 0 je tvořeno jediným bodem, který je zároveň krajním bodem, a jedinou facetou takového tělesa je prázdná množina. Dále postupujeme matematickou indukcí podle dimenze P.

Nechť H je nadrovina definující facetu F v P. Podle Věty 4.2 má funkce vzdálenosti bodu od H své globální maximum na kompaktním P, řekněme v bodě $x \in P \setminus F$. Označme H' nadrovinu rovnoběžnou s H a rocházející x. Pokud $H' \cap P = \{x\}$, máme požadovaný vrchol. Jinak je $H' \cap P$ polyedrem menší dimenze než P a podle indukčního předpokladu má $H' \cap P$ nějaký vrchol. $\square$

Následující tvrzení pro zjednodušení nedokazujeme, ale odkazujeme čtenáře na argumenty uvedené v Oddíle 6.2.

Tvrzení 4.14. *Nechť x je krajním bodem polyedru P dimenze d. Pak existuje d facet $F_1, \ldots, F_d$ polyedru P takových, že $F_1 \cap \ldots \cap F_d = \{x\}$.*

Lema 4.15. *Nechť P je omezený polyedr a X množina jeho krajních bodů. Pak X je konečná a $\mathrm{conv}(X) = P$ (tj. X jsou vrcholy tohoto polytopu).*

Důkaz: V prvé řadě, jelikož P má konečně mnoho facet, řekněme ℓ, má podle Tvrzení 4.14 nejvýše $\binom{\ell}{d}$ krajních bodů. Proto je X konečná. Označme $T = \mathrm{conv}(X)$.

Zřejmě $T \subseteq P$, protože P je konvexní z definice. Předpokládejme nyní, že existuje $x \in P \setminus T$. Z Věty 4.6 plyne, že mezi T a x existuje oddělující nadrovina H. Nechť $x \in H^-$ (H^- je záporná strana H), tj. $T \subseteq H^+$. Uvažme polyedr $P' = P \cap H^-$ s facetou $F = P \cap H$. Podle Lematu 4.13 existuje další krajní bod $s \in P'$ nenáležející F. Proto je s zároveň krajním bodem původního P. Jelikož však podle naší volby $X \subseteq H^+$ a $s \in H^-$, máme $s \notin X$, spor. $\square$

Tímto jsme dokázali, že z popisu polyedru odvodíme jeho popis (téhož tělesa) coby polytopu. V opačném směru důkazu Věty 4.12 potřebujeme popsat daný polytop coby polyedr. Využijeme následujícího užitečného pojmu:

Definice: Nechť $S \subseteq \boldsymbol{R}^n$. *Polární množinou* k S nazveme

$$S^* = \{\vec{y} \in \boldsymbol{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1 \text{ pro všechna } \vec{x} \in S\} . \tag{1}$$

Fakt: Pro každou $S \subseteq \boldsymbol{R}^n$ je $(S^*)^* \supseteq S$.

Praktický význam polární operace pro nás tkví v tom, že "převrací" popis polytopu P na popis P^* jako polyedru, zvaného *polární polyedr* (a taky naopak). Blíže viz následující tvrzení.

Lema 4.16. *Nechť P je polytop. Pak P^* je omezený polyedr.*

Důkaz: Podle definice

$$P^* = \{\vec{y} \in \boldsymbol{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1 \text{ pro všechna } x \in X\} .$$

Označme X konečnou množinu vrcholů P. Tvrdíme, že

$$P^* = Q, \;\text{ kde }\; Q = \{\vec{y} \in \boldsymbol{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1 \text{ pro všechna } x \in X\} ,$$

z čehož je ihned vidět, že P^* je průnikem konečně mnoha poloprostorů $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1$, tedy polyedrem. Zřejmě $P^* \subseteq Q$. Nechť naopak $y \in Q$, pak $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1$ pro všechna $x \in X$ a tudíž i pro každé x, které je konvexní kombinací z X. Proto $q \in P^*$. Navíc je Q zřejmě omezené. $\square$

Nyní pokud P je polytop, pak $Q = P^*$ je omezený polyedr, a tudíž podle Lematu 4.15 je Q i polytop. Uplatněním stejné úvahy ještě jednou dostáváme, že i Q^* je omezený polyedr. Pro dokončení důkazu Věty 4.12 zbývá zdůvodnit, že $Q^* = P$. Je zřejmé, že posunutím souřadnic můžeme předpokládat, že počátek souřadnic je vnitřním bodem P.

Lema 4.17. *Nechť P je polytop obsahující počátek souřadnic 0 jako svůj vnitřní bod. Pak $(P^*)^* = P$.*

Důkaz: Označme Y množinu vrcholů polyedru–polytopu P^*. Chceme dokázat

$$P = S, \text{ kde } S = \{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1 \text{ pro všechna } y \in Y\}.$$

Jelikož již víme $S \supseteq (P^*)^* \supseteq P$, stačí nám pro důkaz sporem předpokládat, že $\vec{x}^o \notin P$ pro nějaké $\vec{x}^o \in S$. Podle Věty 4.6 (o oddělující nadrovině) pak existují $\vec{a}, b$ takové, že $\vec{a} \cdot \vec{x}^o < b$ a přitom $\vec{a} \cdot \vec{x} > b$ pro všechna $\vec{x} \in P$. Jelikož $0 \in P$, platí $0\vec{x} = 0 > b$. Vydělením uvedených nerovností záporným b proto dostáváme

$$\vec{c} \cdot \vec{x}^o > 1, \ \forall \vec{x} \in P : \vec{c} \cdot \vec{x} < 1,$$

kde $\vec{c} = \frac{1}{b}\vec{a}$. Proto podle definice (1) je $\vec{c} \in P^*$. Jelikož P^* je také polytop, je $\vec{c}$ konvexní kombinací jeho vrcholů z Y; $\vec{c} = \lambda_1 \vec{y}^1 + \ldots \lambda_k \vec{y}^k$. Nakonec získáme úpravou

$$1 < \vec{c} \cdot \vec{x}^o = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{y}^{\,i} \right) \cdot \vec{x}^o = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\vec{x}^o \cdot \vec{y}^{\,i}) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot 1 = 1,$$

což je zřejmý spor. $\square$