

IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 1 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Základní důkazové techniky. Přímý důkaz, důkaz obměnou, důkaz sporem. Protipříklad. Matematická indukce.

Příklad 1.

Dokažte následující tvrzení. Používejte matematické zápisy.

- Součet dvou sudých čísel je sudé číslo.
- Součet dvou lichých čísel je sudé číslo.
- Je-li x^2 sudé číslo, potom i x je sudé číslo. (Vizte větu 6 z přednášky.)

Řešení

a) Tvrzení dokážeme přímo. Nechť $2m$ a $2n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, jsou dvě libovolná sudá čísla. Potom $2m + 2n = 2(m + n)$ je také sudé číslo.

b) Toto tvrzení je analogické předchozímu, dokážeme jej také přímo. Nechť $2m + 1$ a $2n + 1$, $m, n \in \mathbb{Z}$, jsou dvě libovolná lichá čísla. Potom $(2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$ je číslo sudé.

c) Dokážeme obměnou tvrzení. Budeme tedy dokazovat: „Není-li x sudé číslo, potom x^2 není sudé číslo.“ Číslo není sudé právě tehdy, pokud je liché. Proto můžeme dokazované tvrzení ještě dále upravit na „Je-li x liché číslo, potom i x^2 je liché číslo.“

Mějme tedy libovolné liché číslo $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Potom $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ je také liché číslo.

Protože platí obměněné tvrzení, platí i tvrzení původní.

Příklad 2.

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a jejich platnost dokažte nebo vyvráťte.

- Pro každé přirozené číslo n platí, že $(n + 1)^3 + (n - 1)^3$ je dělitelné dvěma.
- Pro každé přirozené číslo n platí, že $(n + 1)^3 + (n - 1)^3$ je dělitelné třemi.
- Každé přirozené číslo je dělitelné dvěma různými přirozenými čísly.

Řešení

a) Tvrzení platí. **Pokud se vám nepodařilo jej dokázat, zkuste to nyní, když víte, že platí.**

Tvrzení dokážeme opět přímo, algebraickými úpravami výrazu.

$$(n + 1)^3 + (n - 1)^3 = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = 2n^3 + 6n = 2(n^3 + 3n)$$

b) Tvrzení neplatí. **Pokud jste tento příklad nevyřešili, zkuste to nyní, když víte, že neplatí.**

Pokud chceme ukázat, že tvrzení neplatí, zpravidla bývá nejlepší nalézt protipříklad. V případě, že tvrzení je ve tvaru implikace, se protipříkladem rozumí konkrétní hodnoty, které splňují předpoklady tvrzení, ale nesplňují jeho závěr.

Předpokladem tohoto tvrzení je „nechť n je přirozené číslo“. Závěr tohoto tvrzení je „výraz je dělitelný třemi“. Musíme tedy nalézt takové přirozené číslo n , pro nějž výraz nebude dělitelný třemi. Takovým číslem je například $n = 1$. Platí

$$(1 + 1)^3 + (1 - 1)^3 = 8$$

ale 8 není dělitelné třemi.

Existují i další protipříklady? Umíte je všechny stručně charakterizovat?

c) Tvrzení neplatí. **Pokud jste tento příklad nevyřešili, zkuste to nyní, když víte, že neplatí.**

Protipříkladem je číslo 1, které je dělitelné pouze sebou samým.

Existují i další protipříklady? Umíte je všechny stručně charakterizovat?

Příklad 3.

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n , $0 \leq n$ platí:

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2$$

Řešení

K důkazu využijeme tvrzení, jehož platnost byla dokázána na přednášce:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Důkaz povedeme matematickou indukcí.

Základní krok. Pro $n = 0$ rovnost zřejmě platí:

$$\sum_{i=0}^0 i^3 = 0 = \left(\sum_{i=0}^0 i \right)^2$$

Indukční předpoklad. Předpokládejme, že rovnost platí pro nějaké přirozené číslo m .

Pozor: nepředpokládáme platnost rovnosti pro všechna přirozená čísla; to teprve dokazujeme. Předpokládáme tedy, že platí

$$\sum_{i=0}^m i^3 = \left(\sum_{i=0}^m i \right)^2$$

Indukční krok. Pomocí indukčního předpokladu dokážeme, že rovnost platí i pro $m + 1$. Chceme tedy dokázat, že

$$\sum_{i=0}^m i^3 = \left(\sum_{i=0}^m i \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{m+1} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{m+1} i \right)^2$$

Vyjdeme z pravé strany rovnosti a postupně ji budeme upravovat.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{m+1} i\right)^2 &= \left((m+1) + \sum_{i=0}^m i\right)^2 = (m+1)^2 + 2(m+1) \sum_{i=0}^m i + \left(\sum_{i=0}^m i\right)^2 = \\ &= (m+1)^2 + 2(m+1) \frac{m(m+1)}{2} + \sum_{i=0}^m i^3 = \end{aligned}$$

(druhý člen jsme upravili podle tvrzení z přednášky,
třetí člen podle indukčního předpokladu)

$$\begin{aligned} &= (m+1)^2 \left(1 + 2 \frac{m}{2}\right) + \sum_{i=0}^m i^3 = (m+1)^3 + \sum_{i=0}^m i^3 = \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} i^3 \end{aligned}$$

To jsme měli dokázat.

Alternativně je možné dosadit vztah z přednášky do dokazovaného vztahu hned a matematickou indukcí dokázat tvrzení: pro všechna přirozená čísla n , $0 \leq n$ platí

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Důkaz bude zcela analogický důkazu tvrzení z přednášky. Napište jej.

Příklad 4.

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n , $0 < n$ je $\sum_{i=1}^n (2i-1)$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení

Onou druhou mocninou přirozeného čísla je n^2 . Budeme tedy dokazovat, že

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

pro všechna přirozená čísla n , $0 < n$. **Pokud jste tento příklad nevyřešili, zkuste to nyní.**

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí.

Základní krok. Pro $n = 1$ rovnost platí, neboť

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1 = 1^2$$

Indukční krok. V indukčním kroku budeme dokazovat následující implikaci: platí-li rovnost pro nějaké přirozené číslo m , potom platí i pro $m+1$. Nechť je tedy m takové přirozené číslo, pro nějž platí $\sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2$.

Potom

$$\sum_{i=1}^{m+1} (2i-1) = (2(m+1)-1) + \sum_{i=1}^m (2i-1) = 2m+1 + m^2 = (m+1)^2$$

To jsme měli dokázat.

Příklad 5.

Matematickou indukcí dokažte tvrzení (je to zobecněná trojúhelníková nerovnost):
Pro všechna kladná přirozená čísla n platí

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

kde x_1, \dots, x_n jsou libovolná reálná čísla.

Řešení

Nerovnost nejprve dokážeme pro $n = 2$. Dokážeme tedy, že platí $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. **Pokud jste tuto nerovnost brali jako známý fakt, zkuste ji dokázat nyní.** Důkaz rozdělíme na čtyři případy.

$0 \leq x_1, 0 \leq x_2$. Potom $|x_1 + x_2| = x_1 + x_2 = |x_1| + |x_2|$.

$0 \leq x_1, x_2 < 0$. Potom $|x_1 + x_2| \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq |x_1| + |x_2|$. **Opravdu chápete, proč to platí?**

$x_1 < 0, 0 \leq x_2$. Analogicky jako předchozí případ.

$x_1 < 0, x_2 < 0$. Potom $|x_1 + x_2| = -x_1 - x_2 = |x_1| + |x_2|$.

Právě dokázané tvrzení nemá žádný vztah ke struktuře důkazu matematickou indukcí, který provedeme níže. Není to ani základní krok, ani indukční předpoklad. Je to „jen“ pomocné tvrzení, které nám umožní použít indukční předpoklad v indukčním kroku.

Základní krok. Pro $n = 1$ dostáváme nerovnost $|x_1| \leq |x_1|$, která zřejmě platí pro libovolné reálné číslo x_1 .

Indukční krok. Nechť nerovnost platí pro nějaké přirozené číslo $m, 0 < m$, tedy nechť platí

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |x_i|$$

kde x_1, \dots, x_m jsou libovolná reálná čísla. Musíme ukázat, že potom nerovnost platí i pro $m + 1$. Nechť x_1, \dots, x_{m+1} jsou libovolná reálná čísla.

$$\left| \sum_{i=1}^{m+1} x_i \right| = \left| x_{m+1} + \sum_{i=1}^m x_i \right| \leq |x_{m+1}| + \left| \sum_{i=1}^m x_i \right| \leq |x_{m+1}| + \sum_{i=1}^m |x_i| = \sum_{i=1}^{m+1} |x_i|$$

První nerovnost je aplikací speciálního případu pro $n = 2$, který jsme dokázali výše. Druhá nerovnost plyne z indukčního předpokladu.