IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 4 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Vlastnosti funkcí. Mohutnost množin. Důkazové techniky.

Příklad 1.

Pro následující množiny A a B rozhodněte, které tvrzení z $|A| = |B|$, $|A| < |B|$, $|A| > |B|$ platí, a své tvrzení dokažte.

a) A je množina všech sudých přirozených čísel, B je množina všech lichých celých čísel.

b) Nechť $m, n \in \mathbb{N}_0$. A je množina všech přirozených čísel větších než m, B je množina všech přirozených čísel větších než n.

c) Nechť $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$. A je množina všech přirozených čísel menších než n, B je množina všech celých čísel větších než m.

d) $A = \mathbb{N}_0$, B je množina všech lichých přirozených prvočísel. Nápověda: využijte tvrzení, že ke každému prvočíslu p existuje prvočíslo q, $p < q$. Zkuste toto tvrzení i dokázat.

e) $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $B = \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

f) $A = \{n^3 + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

g) $A = \{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, $B = \{(m + 3)^2 \mid m \in \mathbb{N}_0\}$

h) $A = \mathbb{N}_0$, $B = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Množina B je tedy otevřený interval reálných čísel.

Řešení

Nejprve si uvědomme, jak je možné jednotlivá tvrzení dokázat. Rovnost $|A| = |B|$ dokážeme tak, že nalezneme bijekci $f : A \to B$. Nerovnost $|A| \leq |B|$ bychom dokázali tak, že bychom nalezli injekci $f : A \to B$. Pokud máme ukázat ostrou nerovnost $|A| < |B|$, potom musíme nalézt injekci $f : A \to B$ a dokázat, že neexistuje bijekce $g : A \to B$.

Pokud hovoříme o „nalezení bijekce“, rozumíme tím definici vhodné funkce a důkaz, že tato funkce je bijektivní (tj. injektivní a surjektivní). Podobně pro injekci.

a) Platí $|A| = |B|$. Mějme funkci $f : A \to B$ definovanou pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ předpisy

$$f(4n) = 2n + 1$$
$$f(4n + 2) = -2n - 1$$

tj. $f = \{(4n, 2n + 1), (4n + 2, -2n - 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Uvědomte si, nebo lépe dokažte, že tato relace je skutečně totální funkce z množiny A do množiny B. Zbývá ukázat, že je to bijekce.

Připomeňte si definici injektivní funkce. Nechť $x, y \in A$, $x \neq y$ jsou libovolné. Rozlišením čtyř případů podle toho, zda $x = 4n$ nebo $x = 4n+2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$, resp. zda $y = 4m$ nebo $y = 4m + 2$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$ ověřte, že potom platí $f(x) \neq f(y)$.

Připomeňte si definici surjektivní funkce. Nechť $z \in B$ je libovolné. Pokud $z > 0$, potom $z = 2n + 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ a tedy $z = f(4n)$, tedy z je obrazem nějakého prvku z A ve funkci f. Případ, kdy $z < 0$ dokončete analogicky sami.

b) Platí $|A| = |B|$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $m \leq n$. Definujme funkci $f : A \to B$ předpisem $f(x) = x + n - m$. Důkaz, že f je bijekce, je snadný. Proveďte jej detailně sami.

Dobře si promyslete, jak by důkaz vypadal, kdybychom předpokládali $m \geq n$.

c) Platí $|A| < |B|$. Zde si dovolíme luxus a prohlásíme, že tvrzení je zřejmé, protože A je množina konečná, zatímco B je množina nekonečná.

Pokud bychom tvrzení chtěli dokázat na úrovni funkcí, potom příslušná injekce by byla podobná funkci z předchozího příkladu. Dále bychom sporem dokázali, že neexistuje surjektivní funkce z A do B. Důkaz si vyzkoušejte.

d) Platí $|A| = |B|$. Definujme funkci $f : A \to B$ předpisem $f(n) = p_n$, kde p_n je n-té liché prvočíslo. Protože jediným prvočíslem, které není liché, je číslo 2, a protože platí tvrzení z nápovědy, je funkce f dobře definovaná pro každé n. Důkaz, že f je bijekce je opět snadný. Proveďte jej detailně sami. Důkaz tvrzení z nápovědy lze nalézt v literatuře.

e) Platí $|A| = |B|$. Definujme funkci $f : A \to B$ následovně:

$$f = \{(n^2, n^3) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

Důkaz, že f je bijekce bude podobný jako pro první dvojici množin A a B.

Nechť $x, y \in A$, $x \neq y$. Potom z definice A existují $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$ takové, že $x = m^2$ a $y = n^2$. Potom z definice f platí $f(x) = m^3$ a $f(y) = n^3$, takže $f(x) \neq f(y)$. Funkce f je injektivní.

Nechť $z \in B$. Potom z definice B existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $y = n^3$. Přitom jistě platí, že $n^2 \in A$, takže $f(n^2) = n^3 = y$. Funkce f je surjektivní.

f) Platí $|A| = |B|$, důkaz však nebude tak přímočarý jako v předchozím příkladě.

Využijeme následující tvrzení. Nechť $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to Z$ jsou bijekce. Potom jsou bijekcemi i ${f_1}^{-1}$ a $f_2 \circ f_1$. Tato tvrzení jste v podstatě dokazovali na písemce. Pokud se vám důkaz stále nedaří, jistě jej naleznete v literatuře.

Nejprve si uvědomme, že $n^2+1 = (-n)^2+1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, ale $n^3+1 \neq (-n)^3+1$ pro žádné $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Z první rovnosti plyne, že $B = \{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Definujme funkce $f : \mathbb{Z} \to A$ a $g : \mathbb{N}_0 \to B$ předpisy

$$f(n) = n^3 + 1, \ n \in \mathbb{Z}$$
$$g(n) = n^2 + 1, \ n \in \mathbb{N}_0$$

Obě funkce f i g jsou bijektivní. Detailně to dokažte. Dále víme (z přednášky), že existuje bijekce $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$. Najděte ji. Nápověda: Funkce z přednášky nepovažuje nulu za přirozené číslo, je však možné ji snadno upravit. Dokažte, že upravená funkce je bijekce.

Nyní $g \circ h \circ f^{-1}$ je hledaná bijekce z A do B.

g) Platí $|A| = |B|$. Důkaz je zcela analogický jako v případě e).

h) Platí $|A| < |B|$. Injekcí, která potvrzuje, že $|A| \leq |B|$, je funkce $f : A \to B$ definovaná předpisem $f(n) = (n + 2)^{-1}$. Důkaz, že nerovnost je striktní, zde neuvedeme, neboť lze nalézt v mnohé literatuře.

Příklad 2.

a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$, existuje $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že $2^m - 1 > n$.
b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$, existuje $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že $2^m - 1 < n$.
c) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$, existuje $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že $2^m - 1 = n$.

Řešení

a) Budeme dokazovat silnější tvrzení: pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$, platí $2^n - 1 > n$. Pro každé n tedy řekneme, jak vypadá vhodné m, čímž potvrdíme jeho existenci. K důkazu silnějšího tvrzení použijeme indukci.

Základní krok. Pro $n = 2$ tvrzení platí, protože $3 > 2$.

Indukční krok. Nechť pro *nějaké* $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$, platí $2^n - 1 > n$. (Toto je indukční předpoklad.) Tedy platí $2^n > n + 1$. Potom

$$2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 > 2(n+1) - 1 = 2n + 1 \geq n + 1$$

První nerovnost plyne z indukčního předpokladu. Druhá nerovnost platí, protože $n > 0$.

Nyní dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že $2^m - 1 > n$. Jedná se tedy o zobecnění původního tvrzení, neklademe zvláštní požadavky na číslo n. Nápověda: zvolte vhodné silnější tvrzení.

b) Toto tvrzení je triviální a věřím, že se jej nikdo nepokusil dokázat indukcí. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 1$, totiž můžeme položit $m = 0$ a bude platit

$$2^0 - 1 = 0 < 1 < n$$

Je možné toto tvrzení zobecnit jako v předchozím případě?

c) Toto tvrzení neplatí. Například pro $n = 4$ vhodné m neexistuje.