

IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 1 — Zadání

Téma

Základní důkazové techniky. Přímý důkaz, důkaz obměnou, důkaz sporem. Protipříklad. Matematická indukce.

Příklad 1.

Dokažte následující tvrzení. Používejte matematické zápisy.

- Součet dvou sudých čísel je sudé číslo.
- Součet dvou lichých čísel je sudé číslo.
- Je-li x^2 sudé číslo, potom i x je sudé číslo. (Vizte větu 6 z přednášky.)

Příklad 2.

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a jejich platnost dokažte nebo vyvráťte.

- Pro každé přirozené číslo n platí, že $(n + 1)^3 + (n - 1)^3$ je dělitelné dvěma.
- Pro každé přirozené číslo n platí, že $(n + 1)^3 + (n - 1)^3$ je dělitelné třemi.
- Každé přirozené číslo je dělitelné dvěma různými přirozenými čísly.

Příklad 3.

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n , $0 \leq n$ platí:

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2$$

Příklad 4.

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n , $0 < n$ je $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Příklad 5.

Matematickou indukcí dokažte tvrzení (je to zobecněná trojúhelníková nerovnost):
Pro všechna kladná přirozená čísla n platí

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

kde x_1, \dots, x_n jsou libovolná reálná čísla.