IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 10 — Zadání

Téma

Induktivní definice. Výpočet programu v deklarativním jazyce, výpočetní krok. Dokazování vlastností programů.

Příklad 1.

Uvažme deklaraci obsahující rovnici $g(x, y) = \textbf{if } y \textbf{ then } x * g(x, y - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}$.

a) Dokažte, že $g(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \mapsto^* \mathbf{8}$.

b) Dokažte, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv m^n$.

Příklad 2.

Uvažme deklaraci obsahující rovnici

$$g(x, y) = \textbf{if } x \textbf{ then } (\textbf{if } y \textbf{ then } (\mathbf{2} + g(x, y - \mathbf{1})) + g(x - \mathbf{1}, y) \textbf{ else } x) \textbf{ else } y$$

Dokažte, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv z \geq m+n$.

Příklad 3.

Uvažme deklaraci obsahující rovnice

$$f(x) = x + \textbf{if } \mathbf{2} * x \textbf{ then } h(x - \mathbf{1}) + f(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{3}$$
$$h(x) = \textbf{if } x \textbf{ then } h(x - \mathbf{1}) * f(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{1}$$

Zapište výpočet výrazu $f(\mathbf{2})$ jako posloupnost kroků výpočtu.

Příklad 4.

Uvažme deklaraci obsahující rovnice

$$f(x) = \textbf{if } x \textbf{ then } x + h(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}$$
$$h(x) = \textbf{if } x \textbf{ then } x + f(x - \mathbf{1}) \textbf{ else } \mathbf{0}$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$, kde $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{m} \equiv \sum_{i=0}^{n} i$.