IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 3 — Zadání

Téma

Operace nad množinami. Relace mezi množinami. Skládání a inverze relací. Totální a parciální funkce. Injekce, surjekce, bijekce.

Příklad 1.

Mějme množiny $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{a,b,c\}$ a $A_3 = \{1,2\}$. Pro danou relaci $R \subseteq$ $\subseteq A_i \times A_j$ určete výčtem jejich prvků všechny totální funkce $f : A_i \to A_j$ takové, že $f \subseteq R$. Které z nich jsou injektivní, surjektivní, resp. bijektivní?

a) $R = \{(1,a),(2,a),(3,b),(2,c),(3,c)\} \subseteq A_1 \times A_2$
b) $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)\} \subseteq A_1 \times A_3$
c) $R = A_3 \times A_2 \subseteq A_1 \times A_2$

Příklad 2.

Nechť X je množina. Identitou nad X nazýváme binární relaci id_X nad X definovanou vztahem

$$\mathrm{id}_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

Nechť A a B jsou množiny. Pro následující případy nalezněte funkce $f : A \to B$ a $g : B \to A$ takové, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Existují takové funkce, aby navíc platilo $f \circ g = \mathrm{id}_B$? Existují relace $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times A$, které nejsou funkcemi, a které splňují $S \circ R = \mathrm{id}_A$. Existují takové relace, aby navíc platilo $R \circ S = \mathrm{id}_B$? Svá tvrzení zdůvodněte.

a) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$
b) $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$
c) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$
d) $A = \emptyset$, $B = \{1\}$
e) $A = \{1\}$, $B = \emptyset$

Poznámky k zadání a řešení: Cílem tohoto příkladu je, abyste se zamysleli nad rozdílem mezi obecnou relací a funkcí. Při řešení zjistíte, že zadání dovoluje v některých místech více interpretací. K řešení si můžete vybrat jen jednu z nich nebo lépe postupně zkusit všechny.

Protože se jedná o konečné případy, kreslete si při řešení obrázky. Řešení pak ale vždy zapište i ve formálním matematickém tvaru!

Příklad 3.

Mějme relaci $R = \{(i, 2i) \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

a) Určete relaci R^{-1}.
b) Určete relaci $R \circ R$. Dosazení do definice nestačí! Zápis zjednodušte!

Příklad 4.

Mějme relaci $R = \{(i,j) \mid \text{existuje } k \in \mathbb{N} \text{ tak, že } i = k \cdot j\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

a) Určete relaci R^{-1}.
b) Rozhodněte, zda platí $R = R \circ R$ a své tvrzení dokažte.

Příklad 5.

Mějme relaci plus $\subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$, plus $= \{((i, j), i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

a) Určete relaci plus $\circ$ plus.
b) Určete realci plus^{-1} $\circ$ plus.
c) Určete relaci plus $\circ$ plus^{-1}.
d) Určete relaci plus^{-1} $\circ$ plus^{-1}.

Dosazení do definice složení relací nestačí! Zápisy zjednodušte!

Příklad 6.

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je parciální funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x/5 & \text{pokud } x \text{ je dělitelné pěti} \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

Je tato funkce injektivní, surjektivní, bijektivní? Uvažme relaci f^{-1}. Je tato relace funkce? Je to totální funkce? Pokud ano, je injektivní, surjektivní, bijektivní?

Příklad 7.

Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou injektivní funkce. Rozhodněte, zda $g \circ f$ a $f \circ g$ jsou injektivní funkce. Své tvrzení dokažte.