

IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 5 — Zadání

Téma

Vlastnosti relací — relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní. Ekvivalence na množině a rozklad množiny.

Příklad 1.

Určete, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické resp. tranzitivní. Určete, které z relací jsou ekvivalence.

- a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{1, 2, 3\}$.
- b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.
- c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{1, 2, 3, 4\}$.
- d) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- e) $R = \emptyset$
- f) $R = \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- g) $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 5 \mid m \text{ a } 7 \mid n\}$
- h) $R = \{(n, n + k) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$
- i) $R = \{(n, n + k) \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$
- j) $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \neq n\}$

Příklad 2.

Pro každou z množin $M_0 = \emptyset$, $M_1 = \{a\}$ a $M_3 = \{a, b, c\}$ určete počet relací $R \subseteq M_i \times M_i$, které jsou

- a) reflexivní
- b) symetrické
- c) tranzitivní

Příklad 3.

Nechť A, B jsou množiny, $f : A \rightarrow B$ funkce. Uvažujme relaci $R \subseteq A \times A$ definovanou předpisem

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$$

Rozhodněte, zda je tato relace ekvivalencí a své tvrzení dokažte.

Příklad 4.

Nechť A, B jsou množiny, $S \subseteq A \times B$ funkce. Uvažujme relaci $R \subseteq B \times B$ definovanou předpisem

$$R = \{(x, y) \in B \times B \mid \exists a \in A : (a, x) \in S \wedge (a, y) \in S\}$$

Rozhodněte, zda je tato relace ekvivalencí a své tvrzení dokažte.

Příklad 5.

Nechť $R, S \subseteq M \times M$ jsou antisymetrické relace. Rozhodněte, zda platí, že $S \circ R$ a R^{-1} jsou antisymetrické relace a své tvrzení dokažte.

Příklad 6.

Rozhodněte, které z následujících systémů podmnožin množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou rozkladem množiny M . U rozkladů vypište výčet prvků příslušné ekvivalence.

- a) $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$
- b) $\{\{1, 2, 6\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$
- c) $\{\{2, 4, 6\}, \{1, 5\}\}$
- d) $\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$

Příklad 7.

Nechť A je množina. Uvažme systém \mathcal{S} podmnožin množiny 2^A , $\mathcal{S} = \{M_a \mid a \in A\}$, kde pro $a \in A$ je $M_a = \{M \subseteq A \mid a \in M\}$.

Určete, zda se jedná o rozklad množiny 2^A , své tvrzení dokažte, a pokud ano, definujte příslušnou ekvivalenci.

Příklad 8.

Nechť A je množina. Definujme relaci $R \subseteq 2^A \times 2^A$ následovně: pro každé $X, Y \in 2^A$ platí $(X, Y) \in R$ právě tehdy, když existuje bijekce $f : X \rightarrow Y$.

Dokažte, že R je ekvivalence a nalezněte třídy ekvivalence příslušného rozkladu.

Příklad 9.

Nechť A, B jsou množiny, $f : A \rightarrow B$ funkce. Definice funkce f se rozšiřuje na množiny podle následujícího předpisu

$$f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$$

(Přestože funkce označujeme stejně, jedná se vlastně o dvě různé funkce. Původní $f : A \rightarrow B$ a nově definovanou $f' : 2^A \rightarrow 2^B$. Stejně označení není na závadu — typ funkce, kterou máme na mysli, je jednoznačně určen tím, na jaký argument ji aplikujeme.)

Nechť A je množina. Definujme množiny $\mathcal{M}_M \subseteq A^A$, kde $M \subseteq A$, a systém $\mathcal{S} \subseteq 2^{A^A}$ následovně:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_M &= \{f \mid f(A) = M\} \\ \mathcal{S} &= \{\mathcal{M}_M \mid \emptyset \neq M \subseteq A\}\end{aligned}$$

Dokažte, že \mathcal{S} je rozklad na A^A a určete příslušnou relaci ekvivalence. Byla by to pravda i v případě, kdy bychom uvažovali obecné funkce $f : A \rightarrow B$?

Nápověda: Pečlivě si uvědomujte, se kterou strukturou v kterém okamžiku pracujete. Například \mathcal{S} je množina množin funkcí z A do A .