

IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 6 — Zadání

Téma

Vlastnosti relací. Ekvivalence, rozklad množiny, třídy ekvivalence. Uspořádání, předuspořádání. Minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádaných množin. Horní a dolní závora, suprémum a infimum. Relace pokrytí na uspořádané množině. Hasseovské diagramy.

Příklad 1.

- Dokažte, že každé uspořádání je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.
- Dokažte, že každá ekvivalence je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.

Příklad 2.

Rozhodněte, které z následujících relací jsou předuspořádání, uspořádání, resp. úplná uspořádání. Svá tvrzení dokažte. Pokud je to nutné, tak v definicích předpokládáme, že (A, \leq_A) a (B, \leq_B) jsou uspořádané množiny.

- $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{a, b, c\}$
- $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{a, b, c\}$
- $R = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\} \subseteq 2^A \times 2^A$
- $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$
- $R = \{((a, b), (c, d)) \mid a \leq_A c \text{ a } d \leq_A b\} \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$
- $R = \{(a, b) \mid \exists c \in M : a = b + c\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$
- $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $R = \{((a, b), (a, c)) \mid b \leq_B c\} \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$
- $R = \{(X, Y) \mid \overline{X} \subseteq \overline{Y}\} \subseteq 2^A \times 2^A$

Příklad 3.

Nechť $R \subseteq M \times M$ je předuspořádání na M . Nechť \sim je jádro R . Dokažte, že uspořádaná množina $(M/\sim, \leq)$ indukovaná předuspořádáním R je dobře definovaná. Tj. dokažte, že $\sim \subseteq M \times M$ je skutečně ekvivalence a $\leq \subseteq M/\sim \times M/\sim$ je skutečně uspořádání.

Příklad 4.

Nechť $R \subseteq M \times M$ je ekvivalence (je to tedy i předuspořádání).

- Jak vypadá jádro R ?
- Jak vypadá uspořádání indukované relací R na příslušném rozkladu?

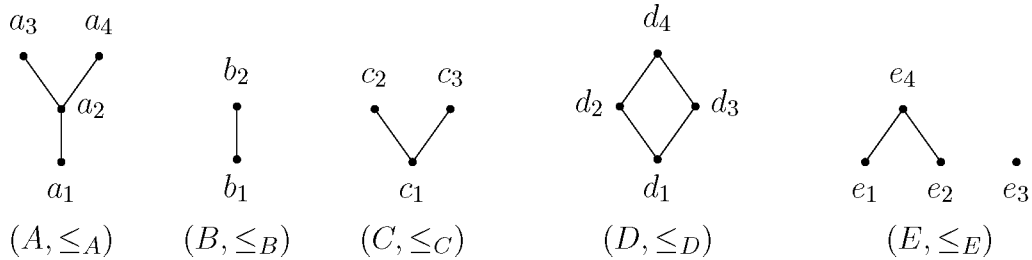
Příklad 5.

Nakreslete grafy relací a Hasseovské diagramy následujících uspořádaných množin.

- $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
- $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \leq)$
- $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \text{id})$

Příklad 6.

Pro uspořádané množiny zadané Hasseovskými diagramy



nakreslete Hasseovské diagramy (nejen) následujících uspořádaných množin.

- $(B \times A, \leq)$, kde \leq je uspořádání po složkách
- $(B \times A, \preceq)$, kde \preceq je lexikografické uspořádání
- $(D \times B, \leq)$, kde \leq je lexikografické uspořádání
- $(C \times E, \preceq)$, kde \preceq je uspořádání po složkách

Příklad 7.

Nakreslete Hasseovský diagram množiny funkcí $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ s uspořádáním po bodech, kde pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ jsou funkce $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definovány následovně

$$\begin{aligned}f_1(n) &= 1 \\f_2(n) &= n + 1 \\f_3(n) &= n^2 \\f_4(n) &= n^2 + n + 1 \\f_5(n) &= n^3 \\f_6(n) &= n^2 + 6 \\f_7(n) &= 2^n\end{aligned}$$

Příklad 8.

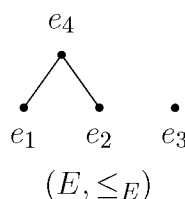
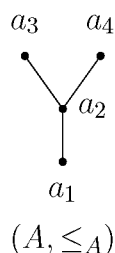
Určete jádro předuspořádání R , příslušný rozklad a uspořádání indukované na tomto rozkladu v případě, že

- $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$, kde A a B jsou libovolné množiny
- $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $R = \{(a, b) \mid \exists k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : a = 5m + k \wedge b = 5n + l \wedge k < l\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $R = \{(a, b) \mid \text{pro každé prvočíslo } p \text{ platí: } p \mid a \Rightarrow p \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Příklad 9.

Určete všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny

- $(2^M, \subseteq)$, kde M je libovolná množina
- $(\mathbb{N}_0, |)$
- $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
- $(\mathbb{Z}, \text{id}_{\mathbb{Z}})$
- $(A \times E, \leq)$, kde \leq je uspořádání po složkách a uspořádané množiny (A, \leq_A) a (E, \leq_E) jsou zadané následujícími Hasseovskými diagramy.



Příklad 10.

- a) Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden nejmenší prvek.
- b) Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden největší prvek.

Příklad 11.

Pro danou uspořádanou množinu (M, \leq) a její prvek x určete všechny prvky y , které prvek x pokrývá, a všechny prvky z , které pokrývají prvek x .

- a) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $x = \{a, c, d\}$
- b) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $x = 924$
- c) $(M, \leq) = (A \times B, \preceq)$, $x = (a_2, b_2)$, kde \preceq je lexikografické uspořádání a $(A, \leq_A) = (\{a_1, a_2, a_3\}, \text{id}_A \cup \{(a_1, a_2)\})$ a $(B, \leq_B) = (\{b_1, b_2, b_3\}, \text{id}_B \cup \{(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_1, b_3)\})$

Příklad 12.

Najděte takovou uspořádanou množinu, v níž každý prvek kromě minimálních a maximálních prvků bude pokrývat dva prvky a bude pokrýván třemi prvky, a uspořádaná množina bude obsahovat alespoň tři takové prvky.

Příklad 13.

Pro danou podmnožinu X uspořádané množiny (M, \leq) určete její dolní závory, horní závory, infimum a supremum.

- a) $(M, \leq) = (2^A, \subseteq)$, kde A je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je $X = \{Y \subseteq A \mid |Y| = n\}$
- b) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $X = \{\{b, c\}, \{c, d\}\}$
- c) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $X = \{\{c\}, \{a, c, d\}\}$
- d) $(M, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq n_0\}$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$
- e) $(M, \leq) = (\mathbb{Z}, \leq)$, $X = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- f) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $X \subseteq \mathbb{N}$, $|X| = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$
- g) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$