

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Mezi množinami $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ existuje bijekce.
- (b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ platí: f, g jsou surjektivní $\implies g \circ f$ je surjektivní.
- (c) **ano** — **ne** Každá lineárně uspořádaná množina má největší prvek.
- (d) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je symetrická právě tehdy, když $\rho \subseteq \rho^{-1}$.
- (e) **ano** — **ne** Je-li uspořádaná množina (A, \leq) úplný svaz, pak (A, \geq) je také úplný svaz.
- (f) **ano** — **ne** $(\mathcal{P}(A), \cap)$ je monoid.
- (g) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je těleso.
2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A . Definujte pojem infima a suprema podmnožiny množiny A . Definujte všechny užité pojmy. Určete, co je infimem prázdné podmnožiny.
3. (3krát 2 body) Určete počet všech slov, která lze vytvořit z písmen slova BEROUNKA (každé písmeno se použije právě jednou) takových, že
- (a) některá skupina bezprostředně po sobě jdoucích písmen tvoří slovo BERAN;
- (b) žádné dvě samohlásky nestojí vedle sebe;
- (c) samohlásky jsou seřazeny podle abecedy.
4. (5krát 2 body) Udejte příklad
- (a) množin X a Y takových, že $\mathcal{P}(X) \cup Y = \mathcal{P}(Y) - Y$;
- (b) uspořádané množiny, která má právě 6 automorfismů (tj. izomorfismů do sebe);
- (c) zobrazení z množiny \mathbb{N} do sebe, které není surjektivní a je injektivní;
- (d) relace na množině \mathbb{N} , která je antisymetrická i symetrická;
- (e) binární operace na \mathbb{Z} , která je komutativní, ale nemá neutrální prvek.
5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definujeme binární operaci \circ vztahem

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b), \text{ pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Q}.$$

Rozhodněte, zda je operace \circ asociativní. Rozhodněte, zda je operace \circ komutativní. Je (M, \circ) grupa? Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n -prvková množina. Určete počet všech dvojic množin (A, B) , takových, že $A \subseteq B \subseteq M$. Kolik z nich je takových, že $A \neq B$?
7. (10 bodů) Na množině \mathbb{Z} je definována binární relace ρ vztahem

$$x\rho y \iff \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{3} \right\rfloor \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině \mathbb{Z} . Popište rozklad $\mathbb{Z} \setminus \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy. (Pozn: $\lfloor a \rfloor$ značí celou část čísla a , tj. největší celé číslo nepřevyšující číslo a .)

8. (10 bodů) Na množině $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$ definujeme binární relaci \preceq takto.

$$(a, b) \preceq (a', b') \iff (a' \leq a \wedge b \leq b'), \quad \text{pro } a, b, a', b' \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že \preceq je uspořádání. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny (M, \preceq) . Je (M, \preceq) úplný svaz? Je (M, \preceq) svaz? Určete $\sup\{(a, b), (a', b')\}$. Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

9. (10 bodů) Na množině $I = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid (\forall n, m \in \mathbb{N})(n \leq m \implies f(n) \leq f(m))\}$ (všech izotonních zobrazení z množiny \mathbb{N} do sebe) definujeme uspořádání \preceq takto:

$$f \preceq g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)), \quad \text{pro } f, g \in I.$$

Dále definujme zobrazení $\varphi : I \rightarrow I$ vztahem $\varphi(f) = f \circ f$.

Dokažte, že skládání zobrazení je operací na množině I , tj. $f, g \in I \implies g \circ f \in I$. Rohodněte, zda je zobrazení φ injektivní. Rohodněte, zda je zobrazení φ surjektivní. Rohodněte, zda φ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny (I, \preceq) do sebe.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)