

1. (7krát  $\pm 1$  bod (správně 1 bod, chybně  $-1$ , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Sjednocení dvou spočetných množin je spočetná množina.
- (b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny  $A, B, C$  a zobrazení  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  platí:  $g \circ f$  je surjektivní  $\implies f$  je surjektivní.
- (c) **ano** — **ne** Na každé množině existuje relace ekvivalence, jež je zároveň uspořádáním této množiny.
- (d) **ano** — **ne** Relace  $\rho$  na množině  $A$  je tranzitivní právě tehdy, když  $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ .
- (e) **ano** — **ne** Pokud  $(R, \leq)$  a  $(S, \preceq)$  jsou neprázdné uspořádané množiny, pak existuje izotonní zobrazení z  $(R, \leq)$  do  $(S, \preceq)$ .
- (f) **ano** — **ne**  $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \cup)$  je grupa.
- (g) **ano** — **ne**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je těleso.

2. (7 bodů) Definujte pojem binární operace na množině  $A$ . Definujte pojem grupa a homomorfismus grup. Definujte všechny užití pojmy.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze

- (a) rozdělit 12 korunových mincí do 7 očíslovaných obálek?
- (b) rozdělit 5 různých mincí do 7 očíslovaných obálek?
- (c) vybrat 20 mincí z neomezeného množství mincí v hodnotách 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč?

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

- (a) množin  $X$  a  $Y$  takových, že  $X - Y = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$ ;
- (b) uspořádané množiny, která má právě dva automorfismy, tři maximální a tři minimální prvky (Pozn: automorfismus je izomorfismus do sebe);
- (c) izotonního zobrazení z uspořádané množiny  $(\mathbb{N}, \leq)$  do uspořádané množiny  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ;
- (d) relace na množině  $\mathbb{N}$ , která je reflexivní a není zobrazením;
- (e) binární operace na  $\mathbb{R}$ , která není komutativní.

5. (10 bodů) Na množině  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  uvažujeme operaci symetrického rozdílu  $\div$  definovanou vztahem

$$X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X), \quad \text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N}.$$

Lze ukázat, že  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div)$  je grupa (nedokazujte). Rozhodněte, zda zobrazení  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  dané předpisem  $f(X) = \mathbb{N} - X$  je homomorfismus z grupy  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div)$  do sebe. Určete neutrální prvek grupy  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div)$ . Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť  $M$  je konečná  $n$ -prvková množina. Určete počet všech rozkladů množiny  $M$ , které mají nejvýše 3 třídy rozkladu.

7. (10 bodů) Na množině  $\mathbb{Z}$  je definována binární relace  $\rho$  vztahem

$$x\rho y \iff 7 \mid (x + 6y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že  $\rho$  je relace ekvivalence na množině  $\mathbb{Z}$ . Popište rozklad  $\mathbb{Z} \setminus \rho$ . Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Necht  $M$  je množina všech antisymetrických binárních relací na množině  $\mathbb{N}$ . Na množině  $M$  uvažujeme relaci  $\subseteq$ . Dokažte, že  $\subseteq$  je uspořádání množiny  $M$ . Rozhodněte, zda je  $\subseteq$  lineární uspořádání. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny  $(M, \subseteq)$ . Nalezněte nejmenší a největší prvek uspořádané množiny  $(M, \subseteq)$ . Je  $(M, \subseteq)$  úplný svaz? Je  $(M, \subseteq)$  svaz? Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Dejte příklad zobrazení  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , které splňuje následující vlastnosti:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})(f(x) \cap f(y) \neq \emptyset); \quad (1)$$

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})(f(x) \cap f(y) \cap f(z) \neq \emptyset \implies (x = y \vee x = z \vee y = z)). \quad (2)$$

Dokažte, že libovolné zobrazení  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , které splňuje vlastnosti (1), (2), je injektivní.

Dokažte, že libovolné zobrazení  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , které splňuje vlastnosti (1), (2), není surjektivní.