Základy matematiky — podzim 2005 — 2. termín — 11.1.2006

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Sjednocení dvou spočetných množin je spočetná množina.

(b) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je surjektivní $\implies$ f je surjektivní.

(c) **ano — ne** Na každé množině existuje relace ekvivalence, jež je zároveň uspořádáním této množiny.

(d) **ano — ne** Relace ρ na množině A je tranzitivní právě tehdy, když $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

(e) **ano — ne** Pokud $(R, \leq)$ a $(S, \preceq)$ jsou neprázdné uspořádané množiny, pak existuje izotonní zobrazení z $(R, \leq)$ do $(S, \preceq)$.

(f) **ano — ne** $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \cup)$ je grupa.

(g) **ano — ne** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je těleso.

2. (7 bodů) Definujte pojem binární operace na množině A. Definujte pojem grupa a homomorfismus grup. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze

(a) rozdělit 12 korunových mincí do 7 očíslovaných obálek?

(b) rozdělit 5 různých mincí do 7 očíslovaných obálek?

(c) vybrat 20 mincí z neomezeného množství mincí v hodnotách 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč?

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) množin X a Y takových, že $X - Y = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$;

(b) uspořádané množiny, která má právě dva automorfismy, tři maximální a tři minimální prvky (Pozn: automorfismus je izomorfismus do sebe);

(c) izotonního zobrazení z uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$;

(d) relace na množině $\mathbb{N}$, která je reflexivní a není zobrazením;

(e) binární operace na $\mathbb{R}$, která není komutativní.

5. (10 bodů) Na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uvažujeme operaci symetrického rozdílu $\div$ definovanou vztahem

$$X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X), \qquad \text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N}.$$

Lze ukázat, že $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div)$ je grupa (nedokazujte). Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dané předpisem $f(X) = \mathbb{N} - X$ je homomorfismus z grupy $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div)$ do sebe. Určete neutrální prvek grupy $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div)$. Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina. Určete počet všech rozkladů množiny M, které mají nejvýše 3 třídy rozkladu.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff 7 \mid (x + 6y) \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$. Popište rozklad $\mathbb{Z} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Nechť M je množina všech antisymetrických binárních relací na množině $\mathbb{N}$. Na množině M uvažujeme relaci $\subseteq$. Dokažte, že $\subseteq$ je uspořádání množiny M. Rozhodněte, zda je $\subseteq$ lineární uspořádání. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \subseteq)$. Nalezněte nejmenší a největší prvek uspořádané množiny $(M, \subseteq)$. Je $(M, \subseteq)$ úplný svaz? Je $(M, \subseteq)$ svaz? Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Dejte příklad zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, které splňuje následující vlastnosti:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})(f(x) \cap f(y) \neq \emptyset); \tag{1}$$
$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})(f(x) \cap f(y) \cap f(z) \neq \emptyset \implies (x = y \vee x = z \vee y = z)). \tag{2}$$

Dokažte, že libovolné zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, které splňuje vlastnosti (1), (2), je injektivní.

Dokažte, že libovolné zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, které splňuje vlastnosti (1), (2), není surjektivní.