

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Mezi množinami \mathbb{N} a \mathbb{Z} existuje bijekce.
- (b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C , injektivní zobrazení $f : A \rightarrow B$ a surjektivní zobrazení $g : B \rightarrow C$ je zobrazení $g \circ f$ bijekcí.
- (c) **ano** — **ne** Každá konečná uspořádaná množina má alespoň jeden minimální prvek.
- (d) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je reflexivní právě tehdy, když $\rho \circ \rho^{-1} \subseteq \rho$.
- (e) **ano** — **ne** Je-li uspořádaná množina (A, \leq) úplný svaz, pak pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ je uspořádaná množina (B, \leq) také úplný svaz.
- (f) **ano** — **ne** \emptyset je neutrální prvek monoidu $(\mathcal{P}(A), \cap)$.
- (g) **ano** — **ne** zobrazení $f : (\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\})$ dané předpisem $f(r) = |r|$ je homomorfismus grupy $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ do sebe.
2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A . Definujte pojem izotonního zobrazení mezi uspořádanými množinami a pojem izomorfismu uspořádaných množin. Definujte všechny užitě pojmy.

3. (3krát 2 body) Určete počet všech přirozených čtyřciferných čísel

- (a) sestavených z cifer 7 a 9;
 (b) sestavených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5 a která jsou menší než 3000;
 (c) sestavených ze dvou různých lichých cifer.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

- (a) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y)| = 3$;
 (b) uspořádané pětiprvkové množiny, která má 4 maximální a 3 minimální prvky;
 (c) relace na tříprvkové množině, která není tranzitivní a současně není ani injektivní zobrazení;
 (d) relace na \mathbb{N} , která je antisymetrická, ale není tranzitivní;
 (e) binární operace na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není asociativní ani komutativní

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujeme binární operaci \circ vztahem

$$(a, b) \circ (a', b') = (a + a' - 1, bb'), \text{ pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Z}.$$

Rozhodněte, zda je operace \circ asociativní. Rozhodněte, zda je operace \circ komutativní. Je (M, \circ) grupa? Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Necht M je konečná n -prvková množina. Určete počet všech trojic množin (A, B, C) takových, že $A \subseteq B \subseteq C \subseteq M$. Kolik z nich je takových, že $A \neq B$? Kolik z nich je takových, že $A \neq C$?

7. (10 bodů) Na množině „celých“ komplexních čísel $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$(a + bi)\rho(a' + b'i) \iff a + b = a' + b' \quad \text{pro } a, b, a', b' \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M . Popište rozklad $M \setminus \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ definujeme binární relace ρ_1, ρ_2, ρ_3 takto:

$$\begin{aligned} X\rho_1Y &\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y), & \text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N}; \\ X\rho_2Y &\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x = y), & \text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N}; \\ X\rho_3Y &\iff (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leq y), & \text{pro } X, Y \subseteq \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda ρ_1 , resp. ρ_2 , resp. ρ_3 je uspořádání. Odpověď zdůvodněte. V případě kladné odpovědi:

nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny (M, ρ_i) . rozhodněte zda je (M, ρ_i) úplný svaz? (Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

9. (10 bodů) Na množině $M = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ (všech zobrazení z množiny \mathbb{N} do sebe) definujeme uspořádání \preceq takto:

$$f \preceq g \iff (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)), \quad \text{pro } f, g \in M.$$

Dále označme $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ množinu všech relací ekvivalence na množině \mathbb{N} a definujme zobrazení $\varphi : M \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{N})$ vztahem $\varphi(f) = J_f$ přiřazující zobrazení f jeho jádro.

Popište nejmenší a největší prvky uspořádané množiny (M, \preceq) , resp. $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Rozhodněte, zda je zobrazení φ injektivní. Rozhodněte, zda je zobrazení φ surjektivní. Rozhodněte, zda φ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny (M, \preceq) do uspořádané množiny $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)