Základy matematiky podzim 2005 2. opravný termín 25.1.2006

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Mezi množinami $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ existuje bijekce.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je bijektivní $\implies$ f, g jsou bijektivní.

(c) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je antisymetrická právě tehdy, když $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$.

(d) **ano** — **ne** Má-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ nejmenší prvek, pak $(A, \geq)$ má také nejmenší prvek.

(e) **ano** — **ne** Množina všech izotonních zobrazení uspořádané množiny $(A, \leq)$ do sebe spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu.

(f) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}, -)$ je monoid.

(g) **ano** — **ne** Ke každému prvku grupy existuje nejvýše jeden prvek inverzí.

2. (7 bodů) Definujte pojem rozkladu množiny A. Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a rozklad příslušného této relaci (tzv. faktorová množina). Definujte pojem jádra zobrazení.

3. (3krát 2 body) Určete počet všech slov délky 6, která jsou sestavena z písmen a, b, c, d takových, že

(a) některá skupina bezprostředně po sobě jdoucích písmen je $abcd$;

(b) se nezmění, pokud jsou čtena odzadu;

(c) všechna písmena jsou použita.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) množin X a Y takových, že $|\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)| = 5$;

(b) pětiprvkové uspořádané množiny, která má právě jeden maximální, právě jeden minimální, právě jeden největší a právě jeden nejmenší prvek;

(c) surjektivního zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$;

(d) relace na množině $\mathbb{Z}$, která je antisymetrická i symetrická, ale není reflexivní;

(e) binární operace na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která má neutrální prvek (uveďte ho).

5. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$a \circ b = a + b - ab, \text{ pro } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní. Je $(\mathbb{Z}, \circ)$ grupa? Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina. Určete počet všech binárních operací na množině M, pro které existuje neutrální prvek. Kolik z nich je komutativních?

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff (x = y \vee xy > 0) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$. Popište rozklad $\mathbb{R} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Uvažujme množinu $M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ konečná }, 1 \in X\}$ uspořádanou inkluzí $\subseteq$. Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \subseteq)$. Nalezněte nejmenší a největší prvek uspořádané množiny $(M, \subseteq)$. Je $(M, \subseteq)$ úplný svaz? Je $(M, \subseteq)$ svaz? Rozhodněte, zda zobrazení $g : M \to \mathbb{N}$, definované předpisem $g(\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}) = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$, je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(M, \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$. Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

9. (10 bodů) Na množině $S = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ surjektivní } \}$ (všech surjektivních zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe) definujeme uspořádání $\preceq$ takto:

$$f \preceq g \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)), \qquad \text{pro } f, g \in S.$$

Dále definujme zobrazení $\varphi : S \to S$ vztahem $\varphi(f) = f \circ f$.

Dokažte, že skládání zobrazení je operací na množině S, tj. $f, g \in S \implies g \circ f \in S$. Rohodněte, zda je zobrazení φ injektivní. Rohodněte, zda je zobrazení φ surjektivní. Rohodněte, zda φ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(S, \preceq)$ do sebe.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)