Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **A**, 4. 11. 2005

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ne** $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset$

(b) **ne** $\{\{\{\emptyset\}\}\} \in \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$

(c) **ano** $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$

(d) **ano** $\emptyset^A = \emptyset^B$ pro libovolné neprázdné množiny A, B.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných celých čísel $\mathbb{N}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff 3 \mid a+b$	Ne	Ano	Ne
$a \ \rho \ b \iff b < 2^a$	Ano	Ne	Ne
$a \ \rho \ b \iff \lvert a-b \rvert \in \{0,1\}$	Ano	Ano	Ne
$a \ \rho \ b \iff a^2 \mid b$	Ne	Ne	Ano
$a \ \rho \ b \iff (a-b)^2 = a^2+b^2$	Ne	Ano	Ano

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\{A, A \cap B, \emptyset\}$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)
$A = \emptyset$ — *jeden prvek*
$A \neq \emptyset, A \subseteq B$ — *dva prvky*
$A \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ — *dva prvky*
Jinak [$A - B \neq \emptyset$ *(tj.* $A \not\subseteq B$*),* $A \cap B \neq \emptyset$ *(tedy i* $A \neq \emptyset$*)] — tři prvky.*

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí

$$A \cap C = \emptyset \implies (A - B) - C = A - (B - C).$$

„$\subseteq$“ *Pro* x *libovolné:*
$x \in (A - B) - C \implies$
$x \in A - B \wedge x \notin C \implies$
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \implies$ *[neboť* $B - C \subseteq B$*]*
$x \in A \wedge x \notin B - C \implies$
$x \in A - (B - C)$. *[Předpoklad* $A \cap C$ *se nikde nepoužil.]*

„$\supseteq$“ *Pro* x *libovolné:*
$x \in A - (B - C) \implies$
$x \in A \wedge x \notin B - C \implies$
$x \in A \wedge (x \in B \cap C \vee x \notin B \cup C) \implies$
$(x \in A \wedge x \in B \cap C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \cup C) \implies$

$(x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \notin Bx \notin C) \implies$ *[neboť $A \cap C = \emptyset$ první možnost nenastane]*
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \implies$
$x \in A - B \wedge x \notin C \implies$
$x \in (A - B) - C.$

5. (2 body) Nechť je dána množina A, neprázdná množina I a systém množin $\{A_i | i \in I\}$. Dokažte, že potom

$$A - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A - A_i).$$

„⊆" Pro x libovolné:
$x \in A - \bigcap_{i \in I} A_i \implies$
$x \in A \wedge x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \implies$
$x \in A \wedge (\forall i \in I)(x \notin A_i) \implies$
$(\forall i \in I)(x \in A \wedge x \notin A_i) \implies$
$(\forall i \in I)(x \in A - A_i) \implies$
$x \in \bigcap_{i \in I} (A - A_i).$

„⊇" Veškeré implikace v předchozím platí i v opačném směru.

6. (3 body) Nechť A, B jsou neprázdné množiny a definujme zobrazení $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ předpisem $f((X, Y)) = (X - Y, Y - X)$.
Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní. (Odpoveď zdůvodněte.)
Ne. $f((X, X)) = f((\emptyset, \emptyset))$ *pro libovolné* $X \subseteq A \cap B$.
Rozhodněte, zda je zobrazení f surjektivní. (Odpoveď zdůvodněte.)
Ne. (A, B) *nemá vzor, protože vždy* $(X - Y) \cap (Y - X) = \emptyset$.
V obou případech předpokládáme, že $A \cap B \neq \emptyset$. *Pokud by* $A \cap B = \emptyset$, *pak* f *identita a tedy bijekce.*

7. (4 body) Buď $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte výčtem prvků z množiny $A \times A$.)

(a) dvojici relací R, S na množině A takových, že $R \subseteq S$, $R \neq S$, R je surjektivní zobrazení a S je relace, která je symetrická a není reflexivní;
např. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}, S = R \cup \{(3, 3)\}$

(b) zobrazení $f : A \to A$ takové, že $f \circ f \neq f$ a $f \circ f \circ f = f$;
např. $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$.

(c) zobrazení $f : A \to A$ takové, že f je tranzitivní relací a současně není symetrickou relací;
např. $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.

(d) relaci R na množině A takovou, že $R^{-1} \circ R = A \times A$, přičemž R je zároveň i zobrazení.
např. $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.