1 Princip indukce

1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+5)}{(i+2)(i+3)} = \frac{n(n+1)}{n+3}.$$

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \geq \frac{7}{12} - \frac{1}{n+1}.$$

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 6$ platí $2^n > (n+1)^2$.

5. Nechť r je reálné číslo takové, že $r + \frac{1}{r}$ je celé číslo. Dokažte, že pak pro každé přirozené číslo n je $r^n + \frac{1}{r^n}$ rovněž celé číslo.

6. Dokažte, že součet vnitřních úhlů v (konvexním) n-úhelníku je roven $\pi \cdot (n-2)$.

7. V konvexním n-úhelníku jsou sestrojeny některé úhlopříčky přitom žádné dvě se neprotínají ve vnitřním bodě n-úhelníka. Dokažte, že z některých dvou (nesousedních) vrcholů n-úhelníka nevychází žádná ze sestrojených úhlopříček. (Zde $n \geq 3$, resp. $n \geq 4$ v případě tvrzení o nesousedních vrcholech.)

8. Nechť reálné číslo γ a celé číslo l jsou taková, že $l \cos \gamma$ je celé číslo. Dokažte, že potom pro každé přirozené číslo n je také $l^n \cos n\gamma$ celé číslo.
   Návod: Použijte známý goniometrický vzorec
   $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$
   pro $\alpha = n\gamma$ a $\beta = (n-2)\gamma$

9. Máme obdélníkovou tabulku čokolády s $m \times n$ dílky. Chceme ji rozlámat na jednotlivé dílky, a to tak, že vždy jeden obdélník rozlomíme na dva obdélníky menší. Kolik obdélníků musíme rozlomit nejméně a kolik nejvíce?
   Návod: Vždy $m \cdot n - 1$.

2 Logika a přirozená čísla

1. Ověřte, že následující formule jsou ekvivalentní:

   (a) $A \vee B$
   $\neg A \to B$

(b) A ∧ B
$\neg(A \to \neg B)$

(c) $A \leftrightarrow B$
$(A \to B) \wedge (B \to A)$

(d) $\neg(p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \wedge \neg r)$
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

2. Nalezněte výrokovou formuli v promněných A, B, C s následující tabulkou pravdivostních hodnot

A	B	C	
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

3. Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé v $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$.

   (a) $(\forall x)(\forall y)(x < y \to (\exists z)(x < z < y))$
   (b) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + z = y)$
   (c) $(\exists z)(\forall x)(z \leq x)$
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(z|x \wedge z|y \wedge (\forall u)((u|x \wedge u|y) \to u|z))$
   (e) $(\exists x)(\forall y)(y + x = x + y = y)$

4. Znegujte formule z předešlého příkladu a upravte je do tvaru, ve kterém se bude negace vyskytovat jen u atomických formulí.

5. Popište následují vlastnosti formulí a diskutuje jejich pravdivost v číselném oboru $\mathbb{N}$.

   (a) každé číslo je dělitelné prvočíslem;
   (b) existuje nejmenší společný násobek libovolné dvojice čísel.

6. Je možné zaměnit v libovolné formuli predikátové logiky obecný a existenční kvantifikátor? Diskutujte obě implikace. Konkrétně mějme formuli predikátové logiky se dvěmi volnými promněnými $f(x, y)$. Platí $(\forall x)\ (\exists y)\ f(x, y) \leftrightarrow (\exists y)\ (\forall x)\ f(x, z)$? Jako příklad formule $f(x, y)$ uvažujte $x \leq y$.

7. Pro každé $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ existují jednoznačně určená $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < b$ taková, že platí $a = bq + r$. Dokažte.

3 Množinová algebra a kartézské součiny množin

1. Určete, která z těchto tvrzení jsou pravdivá:

   (a) $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

   (b) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (c) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (d) $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$

   (e) $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$

   (f) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}\}$

   (g) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

   (h) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

2. Nechť A, B, C jsou množiny. Určete, kolik prvků má daná množina. (Pozor, odpovědi se mohou lišit v závislosti na množinách A, B, C.)

   (a) $\{\{\{\emptyset, \emptyset\}\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}\}$

   (b) $\{A, B, C\}$

   (c) $\{A, \{B, C\}\}$

   (d) $\{A, \{B\}, \emptyset\}$

3. Dokažte, že pro libovolné množiny A,B,C platí:

   (a) $A \cap B = A - (A - B)$

   (b) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

   (c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

   (d) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$

   (e) $A \cap B \subseteq C \iff A \cap (B - C) = \emptyset$

   (f) $A \subseteq C \implies (A \subseteq B \iff (C - B) \subseteq (C - A))$

4. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A,B,C platí:

   (a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

   (b) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

   (c) $A \cap C \subseteq B \implies$
   $((A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff (A \cap B) \cup C = B \cap (A \cup C))$

5. Určete, čemu se rovná:

   (a) $\bigcap \emptyset$

   (b) $\bigcup \emptyset$

   (c) $\bigcup \{\emptyset\}$

(d) $\bigcap \mathcal{P}(A)$

(e) $\bigcup \mathcal{P}(A)$

6. Nechť I, J jsou neprázdné indexové množiny a nechť A, B_i pro $i \in I$ a C_j pro $j \in J$ jsou množiny. Dokažte, že platí:

   (a) $A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$

   (b) $A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$

   (c) $A - \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A - B_i)$

   (d) $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \div C_j) = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cup C_j) - \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(B_i \cap C_j)$

7. Nechť I je neprázdná indexová množina a nechť A, B_i pro $i \in I$ jsou množiny. Rozhodněte, který z následujících vztahů je pravdivý:

   (a) $\bigcap_{i\in I}(A \div B_i) \subseteq A \div \bigcap_{i\in I} B_i$

   (b) $A \div \bigcap_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap_{i\in I}(A \div B_i)$

8. Určete, pro které množiny A platí:

   (a) $A - \{\emptyset\} = A \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

   (b) $A \cup \bigcup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (c) $\bigcup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (d) $\bigcup A = \bigcap A$

   (e) $\bigcup A = (\bigcap A) \cup \{\emptyset\}$

9. Nechť I značí množinu všech prvočísel. Pro každé prvočíslo $p \in P$ označme $A_p = \{x \in \mathbb{N} \mid (p \mid x)\}$. Dokažte, že pak platí:

   (a) $\bigcup_{p\in I} A_p = \mathbb{N} - \{1\}$

   (b) $\bigcap_{p\in I} A_p = \emptyset$

   (c) je-li $J \neq \emptyset$ libovolná konečná množina prvočísel, pak $\bigcap_{p\in J} A_p \neq \emptyset$.

10. Nechť A, B, C, I a A_i pro $i \in I$ jsou množiny. Dokažte, že platí:

    (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

    (b) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

    (c) $A \times \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A \times A_i)$

    (d) $A \cap B = \emptyset \implies (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$

11. Určete, pro které množiny A, B a pro které systémy množin A_i, $i \in I$, platí:

    (a) $\mathcal{P}(A - B) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$

    (b) $\mathcal{P}(A - B) \supseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$

    (c) $\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i)$

    (d) $\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}(\bigcup_{i\in I} A_i)$

4 Zobrazení

1. Najděte všechna zobrazení množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{i, a\}$. Najděte všechna zobrazení množiny B do množiny A. Které z nich jsou bijekce, injekce a surjekce?

2. Určete kolik je zobrazení z konečné a-prvkové množiny A do konečné b-prvkové množiny B. Rozhodněte, zda je některé z nich injekce, surjekce, resp. bijekce.

3. Pro které konečné množiny A

   (a) existuje injektivní zobrazení $\{0, 1\}^A \to A \times A$,

   (b) existuje surjektivní zobrazení $A \times A \to A^A$?

4. Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Udejte podmínku, která

   (a) je nutná a není dostatečná,

   (b) je dostatečná a není nutná,

   pro to, aby zobrazení $f : A \to B$ bylo surjektivní.

5. Rozhodněte zda následující předpisy určují zobrazení? V kladném případě zjistěte, zda je zobrazení injektivní, příp. surjektivní.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to]0, 1[$, $f(x) = |x|$,

   (b) $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x = 0 \\ 1 \text{ pro } x > 1 \\ 2 \text{ pro } x < 2 \end{cases}$

   (c) $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$, $f(x) =$ zbytek po dělení $x : 3$,

   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x$,

   (e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = (x - 1)^2 + 1$,

   (f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} y \text{ pokud } (y - 1)^2 + 1 = x \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

   (g) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $f((x, y)) = \{x, y\}$,

   (h) $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}_0$, $f(X) =$ počet prvků X,

   (i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $f(X) = minX$.

   Upravte zadání předchozích příkladů tak, aby se odpověď změnila; např. změňte výchozí množinu tak, aby zobrazení bylo prosté, cílovou množinu nebo předpis tak, aby bylo surjektivní a pod.

6. Najděte $a, b \in \mathbb{Z}$ tak, aby zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definované předpisem $f(x) = \left\lfloor \frac{ax+b}{2} \right\rfloor$ bylo injektivní nebo surjektivní. Závorky $\lfloor\ \rfloor$ značí celou část.

7. Pro bijektivní zobrazení $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadané vztahy $f(x) = x - 2$ a $g(x) = 2x + 3$, najděte předpis pro $f \circ g$, f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g^{-1}$ a pod. Jak se řešení liší, pokud množinu $\mathbb{R}$ nahradíme množinou $\mathbb{Z}$.

8. Dokažte, že následující zobrazení jsou bijektivní.

   (a) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$,

   (b) $f :]a, b[\to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{x-a}{b-x}$.

   Dejte předpis inverzních zobrazení.

9. Dokažte, že následující zobrazení f, g jsou vzájemně inverzní zobrazení (a tudíž bijekce).
   $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$,
   $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g(y) = 2|y - \frac{1}{4}| + \frac{1}{2}$

10. Pro disjunktní množiny A a B dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(A \cup B) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ definované předpisem $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ je bijekce. Najďete zobrazení inverzní.

11. Dokažte, že pro libovolnou množinu A je zobrazení $f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A$, které podmnožině $B \subseteq A$ přiřazuje charakteristickou funkci, bijektivní.

12. Přepište zobrazení z příkladu 10 po ztotožnění $\mathcal{P}(A) \cong \{0, 1\}^A$ a zobecněte výsledek tak, abyste dokázali $C^{A \cup B} \cong C^A \times C^B$ pro libovolné množiny A, B, C, kde $A \cap B = \emptyset$.

13. Nechť $f : A \to A$ je zobrazení takové, že existuje $n \in \mathbb{N}$ s vlastností $f^n = \mathrm{id}_A$. Dokažte, že f je bijekce.

14. Pro zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zjistěte, zda platí následující ekvivalence. Až zjistíte, že implikace obecně $\longleftarrow$ neplatí, pozměňte levou stranu tak, aby platila.

    (a) f a g jsou injektivní $\longleftrightarrow$ $g \circ f$ je injektivní,

    (b) f a g jsou surjektivní $\longleftrightarrow$ $g \circ f$ je surjektivní.

15. Nechť $A \neq \emptyset$. Dokažte, že pro jakékoliv zobrazení $f : A \to B$ platí

    (a) f je injektivní $\longleftrightarrow$ existuje zobrazení $g : B \to A$ tak, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$,

    (b) f je surjektivní $\longleftrightarrow$ existuje zobrazení $h : B \to A$ tak, že $f \circ h = \mathrm{id}_B$.

16. Nechť A je množina a $f : A \to A$ je zobrazení, které není identické. Dejte příklad zobrazení $g, h : A \to A$ tak, aby platilo

    (a) $f \circ g = g \circ f$,

    (b) $f \circ h \neq h \circ f$.

17. Každé zobrazení $f : A \to B$ idukuje pro libovolné C zobrazení $F : A^C \to B^C$ definované vztahem $F(\phi) = f \circ \phi$. Dokažte, že f není bijektivní nebo F je bijektivní.

5 Relace na množině, ekvivalence a rozklady množin

1. Na množině $\{0, 1\}$ nalezněte všechny relace (resp. uveďte jejich počet), které jsou:

   (a) reflexivní

   (b) symetrické

   (c) tranzitivní

   (d) relace ekvivalence

   (e) symetrické a tranzitivní

   (f) symetrické a antisymetrické

   Totéž v případě jednoprvkové a prázdné množiny.

2. Na množině $\{1, 2, 3\}$ nalezněte všechny relace ekvivalence.

3. Buď $A = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte:
   (Relace i zobrazení zadávejte výčtem prvků z množiny $A \times A$.)

   (a) zobrazení $f, g : A \to A$ taková, že $f \circ g \neq g \circ f$;

   (b) injektivní zobrazení $f : A \to A$, které není reflexivní relací;

   (c) reflexivní relaci R na množině A, která není zobrazením;

   (d) zobrazení $f : A \to A$, které je symetrickou relací a pro něž $f \circ f \neq f$;

   (e) dvojici relací $R \subseteq S$ na množině A takových, že $R \neq S$, R je zobrazení a S je tranzitivní relace.

4. Buď $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zobrazení dané předpisem $s(n) = n + 1$, tj. $s = \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dále definujme relaci $R_<$ na množině $\mathbb{N}$ takto $R_< = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$.
   Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

   (a) symetrickou relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R \subseteq R_<$;

   (b) tranzitivní relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $s \subseteq R$;

   (c) relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R_< \subseteq R$ a zároveň $R \circ R \neq R$;

   (d) zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $f \circ s \neq s \circ f$;

   (e) relaci R na množině $\mathbb{N}$, která není zobrazení, ale $R \circ R$ zobrazení je.

5. Je dána relace ρ na množině $\mathbb{N}$. Rozhodněte zda ρ je reflexivní, resp. symetrická, resp. antisymetrická, resp. tranzitivní relace, je-li pro $x, y \in \mathbb{N}$:

   (a) $x \rho y \iff x \cdot y$ je liché číslo

   (b) $x \rho y \iff x, y$ jsou nesoudělná

   (c) $x \rho y \iff y = x \vee y = 2x \vee y = 3x$

   (d) $x \rho y \iff |x - y| = 3 \vee x = y$

6. Je dána relace ρ na množině $\mathbb{Z}$. Rozhodněte zda ρ je reflexivní, resp. symetrická, resp. antisymetrická, resp. tranzitivní relace, je-li pro $x, y \in \mathbb{Z}$:

   (a) $x\rho y \iff x \neq y$

   (b) $x\rho y \iff x$ sudé, y liché

   (c) $x\rho y \iff x^2 = y$

   (d) $x\rho y \iff |x| < y$

   (e) $x\rho y \iff x \cdot y \leq 0$

   (f) $x\rho y \iff 3|(x + 2y)$

   (g) $x\rho y \iff |x| \leq |y|$

7. Je dána relace ρ na množině $\mathcal{P}(A)$, kde A je neprázdná konečná množina. Rozhodněte zda ρ je reflexivní, resp. symetrická, resp. antisymetrická, resp. tranzitivní relace, je-li pro $X, Y \in \mathcal{P}(A)$:

   (a) $X\rho Y \iff X \cup Y = A$

   (b) $X\rho Y \iff X = \emptyset \vee X = A$

   (c) $X\rho Y \iff X \cap Y \neq \emptyset$

   (d) $X\rho Y \iff$ množiny X, Y mají stejný počet prvků

   (Návod: uvědomte si, že v některých případech může vyšetřovaná vlastnost záviset na počtu prvků množiny A.)

8. Na množině $M = \{1, 2, 3, \ldots, 18, 19, 20\}$ definujeme relaci ρ takto: $x\rho y \iff$ čísla x, y mají stejný součet cifer. Dokažte, že ρ je relací ekvivalence na M a sestrojte rozklad $M \backslash \rho$ (tj. rozklad množiny M přislušný ekvivalenci ρ).

9. Na množině M je definována relace ρ. Rozhodněte, zda ρ je relací ekvivalence na M, je-li

   (a) $M = \mathbb{Z}$; $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x$ nebo $y = x + 1\}$

   (b) $M = \mathbb{R}$; $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$

   (c) $M = \mathbb{R}$; $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| \leq 1\}$

   (d) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\rho = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (A - B)$ je konečná množina$\}$

   (e) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $\rho = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid (A \div B)$ je konečná množina$\}$ kde $A \div B$ je symetrický rozdíl, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$

10. Na množině $\mathbb{Z}$ je definována relace ρ. Dokažte, že ρ je ekvialencí na $\mathbb{Z}$ a popište rozklad $\mathbb{Z} \backslash \rho$. Přitom pro $x, y \in \mathbb{Z}$ je:

    (a) $x\rho y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + 4k$

    (b) $x\rho y \iff x^2 \equiv y^2 (\mathrm{mod}\, 7)$

    (c) $x\rho y \iff x^2 + 2x = y^2 + 2y$

    (d) $x\rho y \iff 2|(x^2 - y^2)$

11. Na množině $\mathbb{Z} - \{0\}$ je relace ρ definována vztahem $x\rho y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$. Dokažte, že ρ je ekvialencí na $\mathbb{Z} - \{0\}$ a popište rozklad $(\mathbb{Z} - \{0\})\backslash\rho$.

12. Na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ je definována relace ρ. Dokažte, že ρ je ekvivalencí na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a načrtněte, jak vypadá rozklad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\rho$ (zde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chápeme jako množinu všech bodů v rovině). Přitom pro $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je:

    (a) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow x - u = 0$

    (b) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow y - v = 2(x - u)$

    (c) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow (x - u)(x + u) = (v - y)(v + y)$

    (d) $(x, y)\rho(u, v) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = u^2 + v^2 + u + v$

13. Nalezněte jádra následujících zobrazení:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}\ f(x) = \lfloor x \rfloor$

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

    (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x)$ je zbytek po dělení čísla x číslem n

    (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$

    Popište příslušný rozklad.

14. Nechť R, S jsou relace na množině A. Dokažte, že pokud R, S jsou symetrické relace, pak $R \cap S$ je také symetrická relace.

15. Nechť R, S jsou relace na množině A. Rozhodněte, zda platí:

    (a) R, S reflexivní $\implies$ $R \circ S$ reflexivní;

    (b) R, S symetrické $\implies$ $R \circ S$ symetrická;

    (c) R, S tranzitivní $\implies$ $R \circ S$ tranzitivní;

16. Dokažte, že pro libovolné relace $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ a $T \subseteq C \times D$ platí:

    (a) $(R^{-1})^{-1} = R$

    (b) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

    (c) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

    (d) $S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$

    (e) $S \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq (S \circ R_1) \cap (S \circ R_2)$

    (f) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

    (g) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

    (h) $S \circ R_1 - S \circ R_2 \subseteq S \circ (R_1 - R_2)$

    Dokažte, že v (e) a (h) obecně neplatí rovnost. Zformulujte a dokažte vztahy (d) — (g) pro libovolná sjednocení resp. průniky.

17. Udejte příklad relace na množině $\mathbb{N}$, která je:

    (a) symetrická, tranzitivní, ale není reflexivní
    (b) symetrická a současně antisymetrická
    (c) není symetrická ani antisymetrická
    (d) symetrická a není antisymetrická
    (e) antisymetrická a není symetrická
    (f) reflexivní, tranzitivní, ale není symetrická ani antisymetrická
    (g) tranzitivní, reflexivní a symetrická, ale neníekvivalencí

    Hledejte co možná nejmenší (vzhledem k inkluzi) relace.

18. Nechť A a B jsou množiny. Charakterizujte zobrazení $f : A \to B$, pro která platí:

    (a) $J_f = id_A$
    (b) $f(A) = B$

19. Je sjednocení (resp. průnik) reflexivních (resp. symetrických, resp. tranzitivních) relací reflexivní (resp. symetrická, resp. tranzitivní) relace? (Používejte i „množinové“ definice daných vlastností; např. relace S je tranzitivní, pokud $S \circ S \subseteq S$.)

20. Nechť $\alpha \subseteq A \times A$ je libovolná relace na množině A. Rozhodněte, zda existuje nejmenší (vzhledem k inkluzi) relace mezi všemi relacemi $\beta \subseteq A \times A$, $\alpha \subseteq \beta$ které jsou:

    (a) reflexivní
    (b) symetrické
    (c) tranzitivní
    (d) reflexivní a symetrické
    (e) reflexivní a tranzitivní
    (f) symetrické a tranzitivní
    (g) relace ekvivalence
    (h) antisymetrická

    Podobně rozhodněte, zda existuje největší (vzhledem k inkluzi) relace mezi všemi relacemi s danou vlastností, které jsou obsženy v relaci α.

21. Relaci $R \subseteq A \times A$ nazývame *dichotomickou*, pokud $R \cup R^{-1} = A \times A$. Rozhodněte, zda je každá dichotomická relace reflexivní.

    Nechť množina A má n prvků. Kolik je na množině A relací, které jsou:

    (a) dichotomické
    (b) symetrické a dichotomické

Rozhodněte (dokažte nebo najděte protipříklad), zda platí následující tvrzení:
Jsou-li $R_1, R_2, \ldots, R_n$ reflexivní relace ($n \geq 1$), z nichž alespoň jedna je dichotomická, pak je relace $R_n \circ R_{n-1} \circ \cdots \circ R_1$ dichotomická. Platí opačná implikace?

22. Relaci R na množině A nazýváme 3-tranzitivní, jestliže

$$\forall a, b, c, d \in A : (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (c, d) \in R) \Rightarrow (a, d) \in R).$$

Rozhodněte, zda platí nasledující tvrzení (tzn. tvrzení dokažte nebo nalezněte protipříklad):

(a) Každá 3-tranzitivní relace je tranzitivní.

(b) Každá tranzitivní relace je 3-tranzitivní.

Pokuste se diskutovat obecně vztah n-tranzitivity a m-tranzitivity.

6 Uspořádané množiny

1. Rozhodněte, zda jsou následující relace uspořádání, resp. lineární uspořádání na $\mathbb{N}$. V případě kladné odpovědi naznačte hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \preceq)$.

(a) $x \preceq y \iff x = y$

(b) $x \preceq y \iff x \leq y$

(c) $x \preceq y \iff x < y$

(d) $x \preceq y \iff y = 4 \vee y = x$

(e) $x \preceq y \iff$ počet cifer čísla x je menší nebo roven počtu cifer čísla y

(f) $x \preceq y \iff x \not\equiv y (\operatorname{mod} 5)$

(g) $x \preceq y \iff (x = y) \vee (2 \not| \, x \wedge 2 \mid y) \vee \ (2 \mid x + y \wedge \ x < y)$

2. Nechť A je libovolná množina. Dokažte, že $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je uspořádáná množina. Sestrojte Hasseovy diagramy v případě:

(a) $A = \emptyset$

(b) $A = \{a\}$

(c) $A = \{a, b\}$

(d) $A = \{a, b, c\}$.

3. Popište maximální a minimální prvky, resp. největší a nejmenší prvek množiny M s uspořádáním ρ.

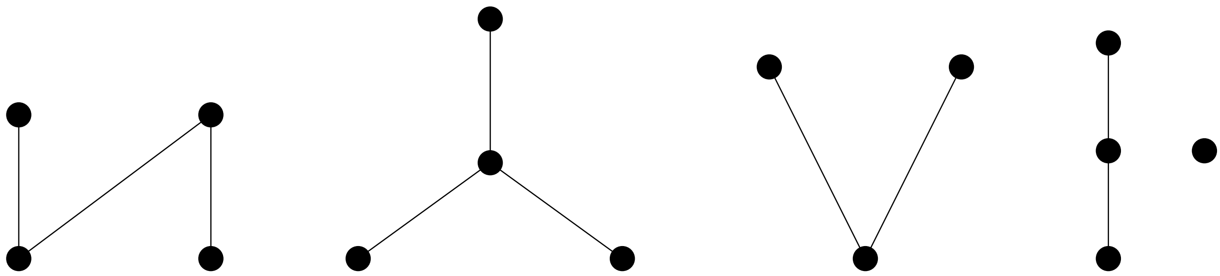
(a) $M = \{a, b, c\}, \rho = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

(b) $M = \{a, b, c\}, \rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

(c) $M = \{a, b, c, d\}, \rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c)\}$

(d) $M = \mathcal{P}(\{a, b\}), \rho \; = \subseteq$

4. Popište maximální a minimální prvky, respektive největší a nejmenší prvek množiny, která má tento hasseovský diagram:



5. Nakreslete hasseovské diagramy všech uspořádání na
   (a) dvojprvkové množině
   (b) trojprvkové množině.

6. Na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definujme relaci R tak, že

$$(x, y) \in R \iff (\exists n \in \mathbb{N})(y = n \cdot x).$$

   Dokažte, že R je uspořádání a sestrojte hasseovský diagram množiny (M, R). Uvažujte relaci R definovanou tímto vztahem na množině $\mathbb{N}$ a schematicky naznačte hasseovský diagram $(\mathbb{N}, R)$. Popište maximální, minimální, největší a nejmenší prvky těchto množin.

7. V předchozích příkladech diskutujte existenci suprem a infim.

8. Na $\mathbb{R}$ definujme relaci R takto:

$$(x, y) \in R \iff (\exists c \in \mathbb{R})(c \geq 1 \wedge c \cdot x = y).$$

   Dokažte, že R je uspořádání na $\mathbb{R}$ a naznačte hasseovský diagram.

9. Nakreslete hasseovský diagram
   (a) čtyřprvkové uspořádáné množiny, která má právě dva maximální prvky a nemá nejmenší prvek
   (b) čtyřprvkové uspořádáné množiny, v níž každý prvek je současně maximální i minimální
   (c) konečné uspořádané množiny, která má právě tři minimální prvky a žádný maximální prvek

10. Uveďte příklad uspořádané množiny $(M, \preceq)$, která
    (a) má aspoň dva maximální prvky a aspoň dva minimální prvky

(b) má právě jeden maximální prvek a nemá největší prvek

(c) má právě jeden nejmenší prvek a právě tři minimální

(d) obsahuje právě dva nesrovnatelné prvky a nemá přitom žádný maximální prvek ani minimální prvek

(e) neobsahuje žádné různé srovnatelné prvky

11. Nechť I je neprázdná množina a $R, R_1, R_2, R_i, i \in I$ jsou uspořádání množiny M. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení.

    (a) R^{-1} je uspořádání

    (b) $\bigcup_{i\in I} R_i$ je uspořádání

    (c) $\bigcap_{i\in I} R_i$ je uspořádání

    (d) $R_1 \circ R_2$ je uspořádání

12. Nechť $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ jsou uspořádané množiny. Definujme relaci $\preceq$ na $A \times B$ takto: $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \sqsubseteq b_2$. Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny $A \times B$. (Hovoříme o součinu uspořádaných mnžin.) Nakreslete hasseovský diagram uspořá dání $\preceq$ množiny $\mathcal{P}(\{a, b\}) \times \{1, 2\}$, kde $\mathcal{P}(\{a, b\}$ je uspořádáno inkluzí a $\{1, 2\}$ dle velikosti. Rozhodněte, zda platí, že součin řetězců je řetězec. Zobecněte definici uspořádání $\preceq$ na součin konečně mnoha uspořádaných množin a naznačte hasseovský diagram.

13. Nechť $(A_i, \preceq_i), i \in I$ je systém uspořádaných množin, které splňují $A_j \cap A_k = \emptyset$ pro $j \neq k; j, k \in I$. Definujme na $\bigcup_{i\in I} A_i$ relaci $\preceq$ takto:

$$x \preceq y \iff (\exists i \in I)(x \preceq_i y).$$

    Dokažte, že $(\bigcup_{i\in I} A_i, \preceq)$ je uspořádaná množina. Nakreslete hasseovský diagram pro $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subseteq))$ a $(\mathbb{N}, \leq)$. Jak by vypadal hasseovský diagram v obecném případě?

14. Nechť $(A, \preceq)$ je uspořádaná množina. Definujme relaci $\leq$ na $A \times A$ takto:

$$(a, b) \leq (c, d) \iff a \prec c \vee (a = c \wedge b \preceq d).$$

    Dokažte, že $\leq$ je uspořádání. Rozhodněte, kdy je lineární. Nakreslete hasseovský diagram pro množinu $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subseteq)$. Zobecněte tuto definici na konečný součin libovolných uspořádaných množin. (Hovoříme o lexikografickém součinu.)

15. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou izotonní, respektive izomorfismy.

    (a) $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$

    (b) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1$

    (c) $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2$

    (d) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

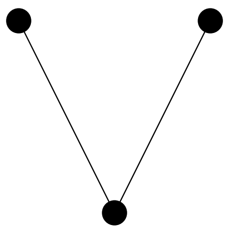
    (e) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto |x|$

    (f) $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 1$

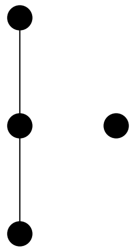
(g) $\mathcal{P}(\{a,b\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\{a,b,c\}), X \mapsto X$

(h) $\mathcal{P}(\{a,b\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\{a,b,c\}), X \mapsto X \cup \{c\}$

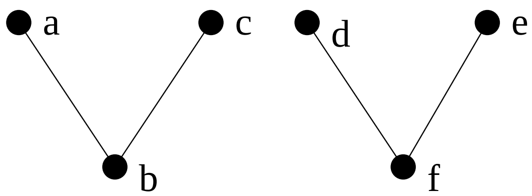
16. Najděte všechna izotonní zobrazení mezi uspořádanými množinami s diagramy:



a



17. Najděte všechny automorfismy (izomorfismy do sebe) uspořádané množiny s tímto diagramem.



18. Udejte příklad

(a) uspořádané množiny a izotonního bijektivního zobrazení množiny na sebe, jehož inverze není izotonní.

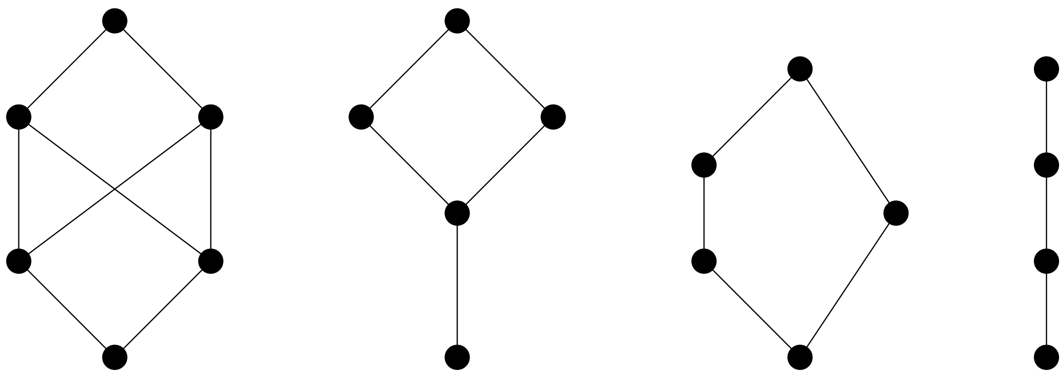
(b) automorfismu pětiprvkové množiny na sebe, který má právě tři pevné body

19. Najděte všechna izotonní zobrazení $(\mathbb{Q}, \leq)$ do $(\{0,1\}, \leq)$. Řekněte, čemu odpovídají.

20. Najděte všechny automorfismy $\omega, \omega \times \omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ s obvyklým uspořádáním.

7 Úplné svazy

21. Rozhodněte, které z těchto uspořádaných množin jsou svazy.



22. Určete všechny pětiprvkové svazy.

23. Rozhodněte, zda následující uspořádané množiny (M, R) jsou svazy, respektive úplné svazy.

    (a) $M = \mathcal{P}(\{A\})$, A je libovolná množina, R je $\subseteq$

    (b) M je množina všech otevřených intervalů na reálné přímce společně s prázdnou množinou, R je $\subseteq$

    (c) A nekonečná, M je množina všech konečných podmnožin A, R je $\subseteq$

    (d) $M = \mathcal{P}(\{A\}) - \{\emptyset\}$, A je libovolná množina, R je $\subseteq$

    (e) $M = \mathbb{N}, R$ je $|$

    (f) $M = \omega, R$ je $|$

    (g) $M = \mathbb{N}, R$ je $\leq$

    (h) A nekonečná, M je množina všech podmnožin A s konečným doplňkem, R je $\subseteq$

    (i) M je množina všech ekvivalencí na A, A je libovolná množina R je $\subseteq$

24. Dokažte, že jsou-li $(A, \leq)$ a $(B, \sqsubseteq)$ svazy, pak součin uspořádaných množin $A \times B$ (definovaný v příkladu 12) je svaz.

25. Nechť A je svaz. Dokažte, že pro libovolné $a, b, c \in A$ platí:

    (a) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

    (b) $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$

8 Základní algebraické struktury

1. Rozhodněte, zda daný grupoid je pologrupa, zda obsahuje neutrální prvek, nulový prvek, zda je to grupa a zda je operace komutativní.

   (a) Celá čísla s operací sčítání.

   (b) Reálná čísla s operací násobení.

   (c) Celá čísla s operací odečítání.

   (d) Přirozená čísla s operací největší společný dělitel.

2. Pro množinu X značíme $P(X)$ množinu všech podmnožin množiny X. Pro následující operace určete, zda grupoid $P(X)$ je pologrupou, zda je operace komutativní a nalezněte neutrální prvek.

   (a) Průnik.

   (b) Sjednocení.

   (c) Množinový rozdíl. ($Y - Z = \{x \in Y \mid x \notin Z\}$)

   (d) Symetricky rozdíl. ($Y \div Z = (Y - Z) \cup (Z - Y)$)

3. Určete, zda operace na tříprvkové množině $\{a, b, c\}$ daná tabulkou je komutativní, asociativní a zda má neutrální prvek.

(a)

$\circ$	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	a
c	a	a	a

(b)

$\circ$	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	c
c	a	c	a

(c)

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

4. Uvažme na množině $\mathcal{P}(X \times X)$ všech relací na množině X operaci $\circ$ definovanou vztahem

$$\rho \circ \pi = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x, z) \in \pi, (z, y) \in \rho\}.$$

   Ukažte, že $\circ$ je asociativní. Určete neutrální a nulový prvek. Rozhodněte, zda $(S, \circ)$, kde $S = \{\rho \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \rho \text{ symetrická}\}$, je grupoid. Rozhodněte, zda $(T, \circ)$, kde $T = \{\rho \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \rho \text{ tranzitivní}\}$, je grupoid.

5. Pro množinu X označme $T(X)$ množinu všech transformací, tj. $T(X) = \{f : X \to X\}$, a $PT(X)$ množinu všech parciálních transformací, tj.

$$PT(X) = \{\rho \in X \times X \ \mid \ \forall x, y, z \in X : x\rho y, x\rho z \implies y = z\}.$$

   Ukažte, že $(T(X), \circ)$ resp. $(PT(X), \circ)$, kde $\circ$ je operace skládání zobrazení, resp. skládání relací, jsou monoidy. Pro danou množinu transformací (resp. parciálních transformací) určete, zda společně s operací skládání zobrazení tvoří grupoid, pologrupu, či grupu. (Pozor: odpovědi se mohou lišit v případech kdy X je jednoprvková, resp. konečná, resp. nekonečná.)

   (a) Všechna injektivní zobrazení.

(b) Všechna surjektivní zobrazení.

(c) Všechna bijektivní zobrazení.

6. Uvažujme množinu $\mathcal{O} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$ všech omezených otevřených intervalů reálných čísel. Ukažte, že průnik $\cap$ je operací na této množině. Rozhodněte, zda je operace $\cap$ asociativní a zda existuje neutrální a nulový prvek. Je $(\mathcal{O}, \cap)$ grupa?

7. Rozhodněte, zda daný grupoid $(G, \circ)$ je grupa.

   (a) G je množina všech nenulových racionálních čísel a operace $\circ$ je dána předpisem $x \circ y = |x \cdot y|$.

   (b) G je interval $\langle 0, 1)$ a operace $\circ$ je dána předpisem $x \circ y = x + y - [x + y]$, kde $[z]$ značí celou část z čísla z, tj. největší celé číslo menší nebo rovno z.

   (c) G je množina všech celých čísel a operace $\circ$ je dána předpisem $x \circ y = x + (-1)^x y$.

   (d) G je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, přičemž první z nich není 0, tj. $G = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ a operace $\circ$ je dána předpisem $(x, y) \circ (u, v) = (xu, xv + y)$.

   (e) G je množina všech komplexních čísel, jejichž reálná i imaginární část je celočíselná a operace $\circ$ je sčítání komplexních čísel.

8. (a) Dokažte, že v libovolné grupě platí tzv. zákony o krácení

$$ab = ac \implies b = c, \qquad ba = ca \implies b = c.$$

   (b) Udejte příklad (nekonečné) pologrupy, která není grupou, ale platí v ní zákony o krácení.

   (c) Udejte příklad tříprvkového grupoidu, který není grupou, ale platí v něm zákony o krácení. Ukažte, že grupoid není pologrupou.

   (d) Nalezněte všechny tříprvkové grupy.

   (e) Nalezněte všechny čtyřprvkové grupy.

9. Pro dané množiny matic typu 2 krát 2 nad reálnými čísly rozhodněte, zda je sčítání, resp. násobení, matic operací na této množině. Pokud se jedná o operaci, zjistěte, zda je operace asociativní či komutativní, zda obsahuje neutrální prvek, a zda se jedná o grupu.

   (a) Množina všech matic nad celými čísly.

   (b) Množina všech matic nad racionálními čísly.

   (c) Množina všech regulárních matic nad racionálními čísly.

   (d) Množina všech matic s nulou v levém dolním rohu a s jedničkami na hlavní diagonále.

   (e) Množina všech regulárních matic nad celými čísly.

   Rozhodněte, zda je daná množina s operacemi sčítání a násobení matic okruhem, oborem integrity, či tělesem.

10. Uvažme následující množiny racionálních čísel:

$$A = \left\{ \frac{m}{p} \ \mid \ m, p \in \mathbb{Z},\ p \neq 0,\ 3 \nmid p, \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{q}{3^n} \ \mid \ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Rozhodněte, zda $(A, +, \cdot)$ (resp. $(B, +, \cdot)$), kde operace $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení racionálních čísel, je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, určete ke kterým prvkům existuje inverze.

11. Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

12. Dokažte, že následující zobrazení jsou homomorfismy. Určete jejich jádra a obrazy. (Zde $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.)

    (a) $\alpha : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $\alpha(a) = 3^a$
    (b) $\beta : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\beta(n) = i^n$
    (c) $\gamma : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $\gamma(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$

13. U každého z následujících předpisů (kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$) rozhodněte, zda zadává zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup.

    (a) $\alpha : (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $\alpha(([a]_4, [b]_3)) = [6a + 4b]_{12}$
    (b) $\beta : (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $\beta(([a]_4, [b]_3)) = [a - b]_{12}$
    (c) $\gamma : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $\gamma(p/q) = q/p$
    (d) $\delta : (\mathbb{Z}_{15}, +) \to (\mathbb{Z}_5, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$, $\delta([a]_{15}) = ([a]_5, [a]_3)$
    (e) $\epsilon : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$, $\epsilon(([a]_2, [b]_5)) = [a + b]_{10}$
    (f) $\zeta : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\zeta([a]_4) = i^a$
    (g) $\eta : (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\eta([a]_5) = i^a$
    (h) $\theta : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_3, +)$, $\theta(a) = [|a|]_3$
    (i) $\iota : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_2, +)$, $\iota(a) = [|a|]_2$

14. Určete jádra a obrazy homomorfismů z předchozího příkladu.

15. Uvažme grupu $(G, \cdot)$ matic typu 3 krát 3 nad $\mathbb{Z}$, které jsou v horním trojúhelníkovém tvaru s jedničkami na hlavní diagonále, tj.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},$$

kde $\cdot$ je násobení matic. Definujme nyní zobrazení $f : (G, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$, které matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

přiřadí číslo $a - c$. Dokažte, že zobrazení f je homomorfismus grup.

16. Uvažme zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definované takto: $f(a+bi) = a+b$ pro $a, b \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda je f homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

17. Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

9 Kombinatorika

1. Buď n přirozené číslo. Čtverec o straně n je rozdělen rovnoběžkami se stranami na n^2 jednotkových čtverců. Kolik je v daném obrazci čtverců.

2. Kolika způsoby lze z úplného souboru domina (28 kostek) vybrat dvě tak, abychom je mohli přiložit k sobě (tedy aby se nějaký počet ok vyskytoval zároveň na obou kostkách)?

3. Na schůzi má promluvit pět řečníků A, B, C, D, E (každý právě jednou).
   (a) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.
   (b) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit bezprostředně po A.
   (c) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, má-li řečník B promluvit až poté, co promluvil řečník A.

4. Kolik čtyřciferných přirozených čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z cifer
   (a) $1, 2, 3, 4$
   (b) $1, 2, 3, 4, 5, 6$
   (c) $0, 1, 2, 3, 4, 5$

   Kolik z nich je sudých? Kolik z nich je dělitelných čtyřmi?

5. V rovině je dáno 6 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolik přímek tyto body určují.

6. Ze skupiny 7 chlapců a 4 dívek je třeba vybrat šestičlenné volejbalové družstvo, v němž musí být aspoň dvě dívky. Kolika způsoby to lze učinit?

7. Kolik značek Morseovy abecedy je možné vytvořit, sestavujeme-li tečky a čárky do skupin o jednom až čtyřech prvcích?

8. Pro osm studentů je připraveno v koleji ubytování ve 3 pokojích, z nichž dva jsou třílůžkové, jeden dvoulůžkový. Kolik je způsobů rozdělení studentů do jednotlivých pokojů?

9. Dokažte binomickou větu: pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

10. Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet všech možných rozdělení. Určete počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček.

11. Pro libovolné pevné $k, n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v množině celých nezáporných čísel (resp. v množině přirozených čísel).

12. Pro libovolné pevné $k, n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení nerovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

v množině celých nezáporných čísel (resp. v množině přirozených čísel).

13. Pro daná čísla $n, k \in \mathbb{N}$ určete počet k-členných posloupností celých čísel $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$ splňujících podmínku $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$.

14. Určete počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla n.

15. V oddělení výzkumného ústavu pracuje několik osob, z nichž každá zná aspoň jeden z těchto tří světových jazyků — angličtinu, němčinu nebo francouzštinu. Šest osob ovládá angličtinu, šest němčinu a sedm francouzštinu, 4 osoby hovoří anglicky i německy, 3 osoby německy i francouzsky, 2 osoby francouzsky i anglicky, jeden pracovník ovládá všechny tři uvedené jazyky.

    (a) Kolik osob pracuje v oddělení?
    (b) Kolik z nich hovoří pouze anglicky?
    (c) Kolik z nich hovoří pouze francouzsky?

16. Kolika způsoby můžeme posadit do řady 3 Angličany, 3 Francouze a 3 Němce tak, aby žádní tři krajané neseděli vedle sebe.

17. Buďte n a k přirozená čísla taková, že $k \leq n$. Nechť dále $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Určete počet všech:

    (a) k prvkových podmnožin množiny A,
    (b) podmnožin množiny A,
    (c) zobrazení množiny A do množiny B,
    (d) bijekcí A na sebe,
    (e) injektivních zobrazení množiny B do množiny A,
    (f) surjektivních zobrazení množiny A na množinu B,
    (g) zobrazení podmnožiny množiny A do množiny B,
    (h) izotonních zobrazení uspořádané množiny $(A, \leq)$ do uspořádané množiny $(B, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání dle velikosti,
    (i) relací na množině A,

(j) reflexivních relací na množině A,

(k) symetrických relací na množině A,

(l) antisymetrických relací na množině A,

Výsledky:

1) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 2) 147; 3) 120, 24, 60; 4) 24, 360, 300; 12, 180, 156; 6, 96; 5) 15; 6) 371; 7) 30; 8) 560; 10) $\binom{20}{5}$, $\binom{14}{5}$; 11) $\binom{n+k-1}{k-1}$, pro $k \leq n$: $\binom{n-1}{k-1}$, jinak 0; 12) $\binom{n+k}{k}$, pro $k \leq n$: $\binom{n}{k}$, jinak 0; 13) $\binom{n+k-1}{k}$; 14) Pokud $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ je jednoznačný rozklad na prvočinitele (tj. $p_1, \ldots, p_k$ jsou různá prvočísla a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$), pak počet dělitelů je $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$; 15) 11, 1, 3; 16) $9! - \binom{3}{1} \cdot 3!7! + \binom{3}{2} \cdot (3!)^2 \cdot 5! - (3!)^4 = 283824$