PÍSEMNÉ ZKOUŠKY ZE ZÁKLADŮ MATEMATIKY

1. Množiny

1. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:
   a) $a \in \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
   b) $\{a, \{a\}\} \cap \mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) \neq \emptyset$
   c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$.

2. Mějme množiny A, B, C. Dokažte:
   a) $(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$
   b) $(C - A) \cap (C - B) = C - (A \cup B)$
   c) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

3. Vypočtěte n´asledující množiny:
   a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
   b) $\bigcup(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) - \mathcal{P}(\emptyset))$
   c) X_3, kde $X_3 = \{X_2\} \cup X_2, X_2 = \{X_1\} \cup X_1$ a $X_1 = \{\emptyset\}$.

4. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí:
   a) $A \subseteq B \Rightarrow (C - B) \subseteq (C - A)$
   b) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \cap (B - C) = \emptyset$
   c) $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \cap B = \emptyset)$.

5. Dokažte, že pro libovolné množiny X, Y platí:
   a) $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$
   b) $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$
   c) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

6. Dokažte nebo vyvraťte, že následující tvrzení platí pro libovolné množiny A, B, C:
   a) $(C - A) \cup (C - B) = C - (A \cap B)$
   b) $(A \cup B) - C = (A - B) \cup (B - C)$
   c) $(A - B) - C = A - (B - C)$.

7.a) Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé
   (1) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (2) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   (3) $\emptyset = \{\emptyset\}$
   b) Určete všechny prvky množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
   c) Udejte příklad množiny A takové, že $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

8. Určete všechny prvky následujících množin
   a) $\emptyset \times \emptyset$
   b) $\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$
   c) $\{\emptyset\}^{\{\emptyset\}}$
   d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$

9. Určete všechny prvky následujících množin
a) $\emptyset - \emptyset$
b) $\emptyset^{\emptyset}$
c) $\emptyset^{\{\emptyset\}}$
d) $\emptyset \times \{\emptyset\}$

10. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:
a) $\emptyset \in \emptyset$
b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
c) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$
d) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
e) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \cap \mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$

11. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:
a) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
b) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
c) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
d) $\emptyset \times \{\emptyset\} = \emptyset$
e) $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

12. Rozhodněte, který z následujících vztahů je pravdivý pro libovolné množiny A, B, C splňující $A \subseteq B$:
(a) $A \cup C \subseteq B \cup C$,
(b) $A \times C \subseteq B \times C$,
(c) $C - A \subseteq C - B$.
Uveďte vždy důkaz nebo protipříklad.

13. Rozhodněte, která z následujících množin je rovna $\emptyset$:
(a) $\emptyset^{\emptyset}$,
(b) $\emptyset^{\{\emptyset\}}$,
(c) $\{\emptyset\}^{\emptyset}$,
(d) $\{\emptyset\} - \mathcal{P}(\emptyset)$,
(e) $\{\emptyset\} - \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.

14. Vypočtěte následující množiny: a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
b) $\mathbb{N} - \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
c) X_2, kde $X_2 = \{X_1\} \cup X_1$ a $X_1 = \{\emptyset\}$

15. Buď $\mathcal{P}(X)^*$ množina všech neprázdných podmnožin množiny X. Určete, pro které množiny X platí

$$\bigcap \mathcal{P}(X)^* = \emptyset.$$

16. Dokažte, že množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}^+$ mají stejnou mohutnost.

2. Zobrazení

1. Mějme zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$. Dokažte:
   a) Jsou-li f, g prostá zobrazení, pak $g \circ f$ je prosté zobrazení.
   b) Jsou-li f, g zobrazení na, pak $g \circ f$ je zobrazení na.
   c) Jsou-li f, g bijekce, pak $g \circ f$ je bijekce.
   Ukažte, že obrácené implikace v těchto tvrzeních obecně neplatí.

2. Mějme zobrazení $f : A \to B, g : B \to C$. Dokažte:
   a) Je-li $g \circ f$ prosté zobrazení, pak f je prosté zobrazení.
   b) Je-li $g \circ f$ zobrazení na, pak g je zobrazení na.
   Ukažte, že v a) nemusí být g prosté zobrazení a že v b) nemusí být f zobrazení na.

3. Buď $f : A \to B$ zobrazení. Pro libovolnou podmnožinu $X \subseteq A$ definujme

$$f(X) = \{f(x) \backslash x \in X\}.$$

Dokažte následující tvrzení:
   a) pro libovolné podmnožiny $X, Y \subseteq A$ platí

$$f(X) - f(Y) \subseteq f(X - Y)$$

   b) v a) obecně neplatí rovnost
   c) je-li f prosté zobrazení, platí v a) rovnost.

4. Buď $f : A \to B$ zobrazení. Definujte, co je jádro zobrazení f, ukažte, že je to relace ekvivalence na množině A, a podrobně dokažte, že příslušná faktorová množina má stejnou mohutnost jako obraz množiny A při zobrazení f.

5. Buď $A = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte
   a) Zobrazení $f : A \to A$ takové, že $f \cdot f = f$
   b) Zobrazení $f, g : A \to A$ takové, že $f \cdot g \neq g \cdot f$
   c) Zobrazení $f : A \to A$ takové, že všechna zobrazení $id_A, f, f \cdot f, f \cdot f \cdot f$ jsou navzájem různá.

6. Buď $A = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte
   a) všechna prostá zobrazení $A \to A$
   b) všechna prostá zobrazení $f : A \to A$ taková, že $f \cdot f \neq f$
   c) všechna prostá zobrazení $f : A \to A$ taková, že existuje $a \in A$ s vlastností $f(a) = a$
   d) všechna prostá zobrazení $f : A \to A$ taková, že existují právě dva prvky $a \in A$ s vlastností $f(a) = a$

7. Mějme zobrazení $f : A \to B$ a podmnožiny X, Y množiny A. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je vždy pravdivé (uveďte buď důkaz nebo protipříklad):
   a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
   b) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

8. Mějme zobrazení $f : A \to B, g : B \to A$ taková, že $g \circ f = id_A$. Dokažte, že f je prosté zobrazení a g je zobrazení na. Udejte příklad takových zobrazení f, g, kteránejsou bijekce.

9. Dokažte, že množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost.

10. Mějme zobrazení $f : A \to B$ a podmnožiny X, Y množiny B. Rozhodněte, která z následujících tvrzení je vždy pravdivé (uveďte buď důkaz nebo protipříklad):
   a) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
   b) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
Připomeňme, že $f^{-1}(Z) = \{a \in A \backslash f(a) \in Z\}$.

11. Dokažte, že zobrazení $f : A \to A$ takové, že $f \circ f = id_A$ je nutně bijektivní. Udejte příklad takového zobrazení různého od id_A.

12. Dokažte, že množina $\mathbb{N}$ má stejnou mohutnost jako množina $\mathbb{Q}^+$ nezáporných racionálních čísel.

13. Dokažte, že zobrazení $f : A \to B$ je bijektivní, právě když existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $f \circ g = id_B$ a $g \circ f = id_A$.

14. Buď A množina. Definujte kartézský součin $A \times A$ a projekce $p_1, p_2 : A \times A \to A$.
   (a) Dokažte, že p_1 je vždy zobrazení na.
   (b) Udejte příklad množiny A takové, že p_1 je prosté zobrazení.

15. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$.

16. Dokažte, že libovolné prosté zobrazení $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je bijektivní.

17. Udejte příklad prostého zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, které není bijektivní.

18. Buď $f : A \to B$ zobrazení a $X, Y \subseteq A$.
   (a) Dokažte, že platí $f(X) - f(Y) \subseteq f(X - Y)$.
   (b) Rozhodněte, zda vždy platí $f(X) - f(Y) = f(X - Y)$.

19. Buďte $f, g : A \to B$ zobrazení. Rozhodněte, která z následující tvrzení jsou pravdivá:
   a) Jsou-li f, g bijektivní zobrazení, pak $f \circ g$ je bijektivní.
   b) Je-li $f \circ g$ bijektivní zobrazení, pak f je bijektivní.
   c) Je-li $f \circ g$ bijektivní zobrazení, pak g je bijektivní.
   d) Jsou-li $g, f \circ g$ bijektivní zobrazení, pak f je bijektivní.

3. Relace

1. Rozhodněte, která z následujících relací $\sim$ na $\mathbb{Z}$ je tranzitivní:
   a) $a \sim b \Leftrightarrow a \neq b$
   b) $a \sim b \Leftrightarrow a$ sudé b liché
   c) $a \sim b \Leftrightarrow |a| \leq b$
   d) $a \sim b \Leftrightarrow a.b \leq 0$.

2. Definujte následující pojmy:

a) relace ekvivalence
b) uspořádaná množina
c) lineárně uspořádaná množina
d) rozklad množiny
e) jádro zobrazení.

3. Buď $\sim$ relace na množině $\mathbb{Z}$ daná předpisem:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \text{ mají stejný zbytek po dělení 2.}$$

Ověřte, že $\sim$ je relace ekvivalence, a popište faktorovou množinu $\mathbb{Z}/\sim$ a projekci $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\sim$.

4. Buď R relace ekvivalence na množině A. Pro $a \in A$ položme

$$R_a = \{b \in A \backslash (a, b) \in R).$$

Dokažte, že pro libovolná $a, b \in A$ platí

$$R_a = R_b \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

5. Dokažte nebo vyvraťte, zda tvrzení z 7. platí i pro libovolnou relaci R, která je
a) symetrická a tranzitivní,
b) reflexivní a tranzitivní,
c) reflexivní a symetrická.

6. Připomeňme, že skládání relací je definováno předpisem

$$R \circ S = \{(x, z) \backslash \text{ existuje } y \text{ tak, že } (x, y) \in S \text{ a } (y, z) \in R\}.$$

Dokažte, že pro libovolné relace $R_1, R_2 \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ platí:
a) $S \circ R_1 \cup S \circ R_2 = S \circ (R_1 \cup R_2)$
b) $S \circ R_1 - S \circ R_2 \subseteq S \circ (R_1 - R_2)$.
Dokažte, že v b) obecně neplatí rovnost.

7. Rozhodněte, která z následujících relací R na $\mathbb{Z}$ je uspořádání:
a) $(a, b) \in R \Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \cdot b \geq 0)$
b) $(a, b) \in R \Leftrightarrow (a|b \wedge a \cdot b \geq 0)$
c) $(a, b) \in R \Leftrightarrow (a \geq b \wedge a|b)$.

8. Rozhodněte, která z následujících relací R na množině $\mathbb{Z}$ je předuspořádání:
a) $(a, b) \in R \Leftrightarrow |a| \leq |b|$
b) $(a, b) \in R \Leftrightarrow (2a)|b$
c) $(a, b) \in R \Leftrightarrow a|(2b)$
d) $(a, b) \in R \Leftrightarrow (a \leq b \vee a \cdot b > 0)$.

9. Buď $\sim$ relace na množině $\mathbb{Z} - \{0\}$ daná předpisem

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y > 0.$$

Ověřte, že $\sim$ je relace ekvivalence na $\mathbb{Z} - \{0\}$, a popište faktorovou množinu $(\mathbb{Z} - \{0\})/\sim$ a projekci množiny $\mathbb{Z} - \{0\}$ na tuto faktorovou množinu.

10. Rozhodněte, která z následujících relací na množině $\mathbb{R}$ je relací ekvivalence a která je relací uspořádání:
a) $a \sim b \Leftrightarrow a|b$
b) $a \sim b \Leftrightarrow \sin a = \sin b$
c) $a \sim b \Leftrightarrow a = b + 1$
d) $a \sim b \Leftrightarrow a \geq b$
e) $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

11. Udejte definici rozkladu množiny A. Pro relace z 10., které jsou relacemi ekvivalence, nalezněte příslušný rozklad.

12. Udejte příklad relace na množině $\mathbb{N}$, která je
a) symetrická, tranzitivní, ale není reflexivní,
b) symetrická a současně antisymetrická,
c) reflexivní, tranzitivní, ale není symetrická ani antisymetrická.

13. Nalezněte
a) všechna navzájem neizomorfní uspořádání tříprvkové množiny,
b) všechny relace ekvivalence na množiě $\{1, 2, 3\}$,
c) počet všech relací na množině $\{1, 2, 3\}$.

14. Nalezněte jádro zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ daného předpisem $f(x) = x^2$ a určete příslušnou faktorovou množinu.
15. Udejte příklad relace R na množině A, která je
a) současně symetrická i antisymetrická,
b) není symetrická ani antisymetrická,
c) je symetrická a není antisymetrická.

16. Buď $\sim$ relace na množině $\mathbb{Z}$ danápředpisem:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \text{ mají stejný zbytek po dělení 5.}$$

Ověřte, že $\sim$ je relace ekvivalence, popište faktorovou množinu $\mathbb{Z}/\sim$ a projekci $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\sim$.

17. Buďte R, S relace na množině A. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé (uveďte buď důkaz nebo protipříklad):
a) Jsou-li R, S tranzitivní relace, pak $R \cup S$ je tranzitivní,
b) Jsou-li R, S tranzitivní relace, pak $R \cap S$ je tranzitivní.

18. Buď $\sim$ relace na množině $\mathbb{R}$ danápředpisem:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ je celé číslo}$$

Ověřte, že $\sim$ je relace ekvivalence, popište faktorovou množinu $\mathbb{R}/\sim$ a projekci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$.

19. Buď $A = \{0, 1\}$ dvouprvková množina. Vypište

(a) všechny reflexivní relace na A,
(b) všechny symetrické relace na A,
(c) vščhny tranzitivní relace na A,
(d) všechny relace ekvivalence na A,
(e) všechny relace uspořádání na A.

20. Buďte R, S relace na množině A. Rozhodněte, které z následujíích tvrzení je pravdivé (uveďte buď důkaz nebo protipříklad):
(a) Jsou-li R, S antisymetrické relace, pak $R \cap S$ je antisymetrická,
(b) Jsou-li R, S antisymetrické relace, pak $R \cup S$ je antisymetrická.

22. Rozhodněte, která z následujících relací na množině $\mathbb{R}$ je tranzitivní:
a) $a \sim b \Leftrightarrow \sin a = \sin b$,
b) $a \sim b \Leftrightarrow a \leq b^2$,
c) $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \leq 1$.

23. Rozhodněte, která z následujících relací na množině $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ je tranzitivní:
a) $A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$,
b) $A \sim B \Leftrightarrow 1 \in A \cap B$,
c) $A \sim B \Leftrightarrow 1 \in A \cup B$.

24. Nalezněte všechny relace ekvivalence na tříprvkové množině.

25. Udejte příklad symetrické a tranzitivní relace R na množině A, která není relace ekvivalence.

26. Buďte R, S relace na množině A. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:
(a) Jsou-li R, S reflexivní, pak $R \cup S$ je reflexivní,
(b) Jsou-li R, S symetrické, pak $R \cup S$ je symetrická,
(c) Jsou-li R, S tranzitivní, pak $R \cup S$ je tranzitivní,
(d) Jsou-li R, S antisymetrické, pak $R \cup S$ je antisymetrická.

27. Nalezněte všechny relace ekvivalence R na množině $\mathbb{N}$ takové, že $(n, n+1) \in R$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

4. Uspořádané množiny

1. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Definujte následující pojmy:
a) horní závora podmnožiny $X \subseteq A$
b) supremum podmnožiny $X \subseteq A$.
Definujte dále pojmy:
c) svaz
d) úplný svaz.

2. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Podmnožina $X \subseteq A$ se nazývá konvexní, jestliže pro každá $a, b, c \in A$ platí
$$a \leq b \leq c \wedge a, c \in X \Rightarrow b \in X.$$

Označme $C(A)$ množinu všech konvexních podmnožin v A. Dokažte, že $(C(A), \subseteq)$ je úplný svaz.

3. Buď $(A, \preceq)$ předuspořádaná množina (t.j., $\preceq$ je reflexivní a tranzitivní relace na A). Definujme na A relaci $\sim$ předpisem

$$a \sim b \Leftrightarrow (a \preceq b \wedge b \preceq a).$$

Ukažte, že $\sim$ je relace ekvivalence na A. Pro libovolné $a \in A$ označme $[a]$ třídu ekvivalence $\sim$ obsahující prvek a. Na faktorové množině $A/\sim$ definujme relaci $\leq$ předpisem

$$[a] \leq [b] \Leftrightarrow a \preceq b.$$

Ověřte, že tato definice je korektní, a ukažte, že $(A/\sim, \leq)$ je uspořádaná množina.

4. Definujte následující pojmy:
   a) největší prvek v uspořádané množině
   b) maximální prvek v uspořádané množině
   c) duálně uspořádaná množina
   d) izotonní zobrazení uspořádaných množin
   e) izomorfismus uspořádaných množin.

5. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina, v níž libovolná podmnožina množiny A má infimum. Dokažte, že pak libovolná podmnožina množiny A má supremum.

6. Udejte příklad uspořádané množiny, která
   a) má minimální prvek, ale nemánejmenší prvek,
   b) má všechna konečná suprema, ale nemá všechna konečná infima,
   c) má všechna suprema neprázdných množin, ale není úplný svaz.

7. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ a libovolné prvky $a, b, c \in A$:
   (a) $a \leq b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = b$,
   (b) $a = b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = \inf\{a, b\}$,
   (c) $c \leq \sup\{a, b\} \Leftrightarrow c \leq a$ nebo $c \leq b$.
Uveďte vždy důkaz nebo protipříklad.

8. Nalezněte uspořádání množiny $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, které má přesně dva minimální a přesně tři maximální prvky. Uspořádání zadejte Hasseovým diagramem.

9. Nalezněte všechny navzájem neizomorfní úplné svazy na pětiprvkové množině.

10. Nalezněte pět navzájem neizomorfních úplných svazů na šestiprvkové množině.

11. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dané předpisem $f(A) = X - A$ je izomorfismus uspořádané množiny $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ na uspořádanou mnoinu $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$.

12. Dokažte, že množina $T(A)$ všech tranzitivních relací na množině A je úplný svaz vzhledem k uspořádání množinovou inkluzí.

13. Rozhodněte, zda množina $A(X)$ všech antisymetrických relací na množině X uspořádaná množinovou inkluzí
   a) obsahuje nejmenší prvek,
   b) obsahuje největší prvek,
   c) je úplný svaz.

14. Vypište všechny prvky množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. Nakreslete Hasseův diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))), \subseteq)$.

15. Nalezněte tři navzájem neizomorfní uspořádané množiny mající pět prvků, z nichž jsou právě dva maximální a právě tři minimální.

16. Nakreslete Hasseův diagram uspořádané množiny $(\{-2, -1, 0, 1, 2\}, R)$, kde

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a \leq b, a \cdot b > 0.$$

17. Nalezněte dvě navzájem neizomorfní uspořádání množiny $\mathbb{N}$.

5. Grupy a okruhy

1. Sestrojte multiplikativní tabulku pologrupy $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$. Určete všechny existující inverzní prvky. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ je grupa.

2. Definujte pojem okruhu, oboru integrity a tělesa. Udejte příklad oboru integrity, který není těleso.

3. Definujte pojem grupoidu a grupy. Udejte příklad asociativního grupoidu s jednotkovým prvkem, který není grupa.

4. Sestrojte multiplikativní a aditivní tabulku okruhu $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Rozhodněte, zda to je těleso.

5. Sestrojte multiplikativní tabulku grupy $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$. Rozhodněte, zda existuje prvek $a \in \mathbb{Z}_7^*$ takový, že každý prvek $\mathbb{Z}_7^*$ je jeho mocninou, t.j., $\mathbb{Z}_7^* = \{1, , a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a, a \cdot a \cdot a \cdot a, a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a, a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a\}$

6. Nalezněte homomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ takový, že $f(3) = 1$. Rozhodněte, zda je izomorfismus.

6. Buď A uspořádaná množina a $I(A)$ množina všech izomorfismů $A \to A$. Dokažte, že $I(A)$ je grupa vzhledem ke skládání zobrazení.

6. Buď A množina všech podmnožin dvouprvkové množiny uspořádaná množinovou inkluzí. Popište grupu $I(A)$.

7. Sestrojte multiplikativní tabulky grup
a) $(\mathbb{Z}_2, +)$.
b) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, kde operace $+$ je definována po složkách, t.j., $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$.
c) $(\mathbb{Z}_4, +)$.

8. Rozhodněte, zda grupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_4, +)$ jsou izomorfní. Své rozhodnutí zdůvodněte.

9. Sestrojte multiplikativní tabulky grup
a) $(\mathbb{Z}_2, +)$.
b) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, kde operace $+$ je definována po složkách, t.j., $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$.
c) $(\mathbb{Z}_4, +)$.

10. Rozhodněte, zda grupy $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_4, +)$ jsou izomorfní. Své rozhodnutí zdůvodněte.

11. Rozhodněte, zda množina všech relací na množině A je grupa vzhledem ke skládání relací.

12. Rozhodňete, zda $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ je okruh, kde operace $+, \cdot$ jsou definovány po složkách, t.j., $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$. Je to obor integrity?

13. Sestrojte multiplikativní tabulky grup $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$, kde $\mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7^* - \{0\}$.

14. Rozhodněte, zda grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ jsou izomorfní.

15. Sestrojte multiplikativní tabulky okruhů
a) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.
b) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, kde operace $+, \cdot$ jsou definovány po složkách, t.j., $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
c) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$.

16. Rozhodněte, které z okruhů v předchozím příkladě jsou obory integrity a které jsou tělesa.