

Jméno: .....

UČO: .....

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.

Hodnocení								

1. (8krát  $\pm 1$  bod (správně 1 bod, chybně  $-1$ , bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na příčném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Složení reflexivních relací je reflexivní relace.
- (b) **ano** — **ne**  $(\mathbb{R}, +, +)$  je okruh.
- (c) **ano** — **ne** Množiny  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Z}$  mají stejnou mohutnost.
- (d) **ano** — **ne** Maximální prvek uspořádané množiny je minimální prvek duálně uspořádané množiny.
- (e) **ano** — **ne** Každý úplný svaz má nejmenší a největší prvek.
- (f) **ano** — **ne** Každá dvě injektivní zobrazení  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : A \rightarrow C$  mají stejné jádro.
- (g) **ano** — **ne** Složení izotonních zobrazení je izotonní zobrazení.
- (h) **ano** — **ne**  $V(\mathbb{Z}_5, \cdot)$  má každý prvek inverzi.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace mezi množinami  $A$ ,  $B$ . Pomocí něj definujte formálně pojem zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Definujte operace skládání zobrazení a skládání relací, která je jejím zobecněním.

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

- (a) spočetného tělesa;
- (b) surjektivního zobrazení  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takového, že  $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$  jsou po dvou různá zobrazení;
- (c) uspořádání  $R$  na množině  $\mathbb{N}$  a relace ekvivalence  $S$  na množině  $\mathbb{N}$  takových, že  $R \subseteq S$ ;
- (d) systému množin  $\mathcal{A}$  takového, že  $\bigcup \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A} = \mathbb{N}$ ;
- (e) množiny  $X$  takové, že množina  $\mathcal{P}(X) \cap X$  má dva prvky.

4. (10 bodů) Na množině  $\mathbb{Z}$  definujeme operaci  $\circ$  vztahem  $x \circ y = xy + x + y$  pro  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Rozhodněte, zda  $(\mathbb{Z}, \circ)$  je grupa. Odpověď zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť množina  $A$  má 10 prvků. Uvažujme její čtyřprvkové podmnožiny  $B$  a  $C$ , které jsou disjunktní. Kolik existuje takových (uspořádaných) dvojic  $(B, C)$ ?  
(Tj. určete počet prvků množiny  $\{(B, C) \mid B \subseteq A, C \subseteq A, |B| = |C| = 4, B \cap C = \emptyset\}$ .)

6. (10 bodů) Na množině  $\mathbb{R}$  je definována relace  $\rho$  vztahem  $x \rho y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ . Dokažte, že  $\rho$  je relace ekvivalence na množině  $\mathbb{R}$  a popište rozklad  $\mathbb{R} \setminus \rho$ . Kolik má tento rozklad prvků?

7. (10 bodů) Na množině  $\mathbb{R}$  definujeme relaci  $\preceq$  takto:

$$x \preceq y \iff (\exists c)(0 < c \leq 1 \wedge x \cdot c = y).$$

Dokažte, že  $\preceq$  je uspořádání. Naznačte hasseovský diagram uspořádané množiny  $(\mathbb{R}, \preceq)$ . Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny  $(\mathbb{R}, \preceq)$ .

8. (10 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu  $(\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq)$ , kde  $\mathcal{E}(\mathbb{N})$  je množina všech relací ekvivalence na množině  $\mathbb{N}$ . Jedná se o úplný svaz? (Zdůvodněte.) Mějme zobrazení  $f : \mathcal{E}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , které relaci ekvivalence  $\rho \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$  přiřazuje třídu rozkladu  $\mathbb{N} \setminus \rho$  obsahující číslo 1. Rozhodněte, zda zobrazení  $f : (\mathcal{E}(\mathbb{N}), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  je izotonní. Rozhodněte, zda zobrazení  $f$  je injektivní resp. surjektivní.