

1. (8krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nevhodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):
 - (a) **ano** — **ne** Množina $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ všech zobrazení z množiny přirozených čísel do sebe je spočetná.
 - (b) **ano** — **ne** Existuje právě jedno zobrazení z množiny \mathbb{R} do prázdné množiny.
 - (c) **ano** — **ne** Binární relace R na množině A je symetrická právě tehdy, když $R = R \cap R^{-1}$.
 - (d) **ano** — **ne** Pro libovolné uspořádané množiny $(A, \leq), (B, \leq)$ a bijekci $f : A \rightarrow B$ platí: f je izotonní $\implies f^{-1}$ je izotonní.
 - (e) **ano** — **ne** Každý prvek v uspořádané množině je buď minimální nebo maximální.
 - (f) **ano** — **ne** Pro každou neprázdnou množinu A existuje uspořádání R takové, že (A, R) je úplný svaz.
 - (g) **ano** — **ne** Odčítání je binární operací na množině přirozených čísel \mathbb{N} .
 - (h) **ano** — **ne** Podokruh oboru integrity je obor integrity.
2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádané množiny a úplného svazu. Definujte všechny užití pojmy.
3. (5krát 2 body) Udejte příklad
 - (a) čtyřprvkové uspořádané množiny, jejíž všechny prvky jsou maximální;
 - (b) surjektivního zobrazení $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, které není injektivní;
 - (c) relace ekvivalence ρ na množině \mathbb{Z} tak, aby rozklad \mathbb{Z}/ρ měl 3 třídy rozkladu a každá třída měla nekonečně mnoho prvků;
 - (d) binární operace na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není asociativní;
 - (e) uspořádání na množině komplexních čísel \mathbb{C} .
4. (10 bodů) Na množině všech podmnožin množiny přirozených čísel $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uvažujeme binární operace symetrického rozdílu \div a průniku \cap o nichž víme, že jsou asociativní. Rozhodněte, zda $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \div, \cap)$ je okruh, či dokonce těleso. Odpověď zdůvodněte.
5. (10 bodů) Nechť konečná množina A má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Určete kolik je uspořádání \leq množiny A takových, že v množině (A, \leq) jsou právě dva prvky maximální, právě $n - 2$ prvků je minimálních, přičemž každý prvek je buď maximalní nebo minimální.
6. (10 bodů) Na množině komplexních čísel \mathbb{C} je definována binární relace ρ vztahem $x\rho y \iff x^3 = y^3$, pro $x, y \in \mathbb{C}$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině \mathbb{C} . Popište rozklad \mathbb{C}/ρ . Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.
7. (10 bodů) Nechť $M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ nekonečná}\}$. Je (M, \subseteq) úplný svaz? Je $(M \cup \{\emptyset\}, \subseteq)$ úplný svaz? Pro libovolné $X, Y \in M$ popište $\inf\{X, Y\}$ v uspořádané množině $(M \cup \{\emptyset\}, \subseteq)$. Odpovědi zdůvodněte.
8. (10 bodů) Buď dána množina $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Na množině M definujeme uspořádání \preceq takto:

$$(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subset X' \vee (X = X' \wedge Y \subseteq Y')), \quad \text{pro } X, Y, X', Y' \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Definujme dále zobrazení $f : M \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ předpisem $f((X, Y)) = X \cap Y$. Rozhodněte, zda je zobrazení f surjektivní. Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní. Je toto zobrazení $f : (M, \preceq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní? Rozhodněte, zda je (M, \preceq) úplný svaz. Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: Zápisem $X \subset X'$ rozumíme $X \subseteq X' \wedge X \neq X'$.)