

1. (8krát  $\pm 1$  bod (správně 1 bod, chybně  $-1$ , bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):
  - (a) **ano** — **ne** Existuje bijekce z množiny  $\mathbb{R}$  do množiny  $\mathbb{Q}$ .
  - (b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny  $A, B, C$  a zobrazení  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  platí:  $g \circ f$  je bijekce  $\implies (f$  je bijekce  $\vee g$  je bijekce).
  - (c) **ano** — **ne** Pokud binární relace  $R$  na množině  $A$  je symetrická, pak  $R^{-1}$  je antisymetrická.
  - (d) **ano** — **ne** Pokud  $R$  je uspořádání množiny  $A$ , pak  $R^{-1}$  je také uspořádání množiny  $A$ .
  - (e) **ano** — **ne** Pro libovolnou uspořádanou množinu  $(A, \leq)$  je identické zobrazení  $id_A : (A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$  izotonní.
  - (f) **ano** — **ne** Podgrupy dané grupy tvoří úplný svaz vzhledem k uspořádání inkluzí.
  - (g) **ano** — **ne** Zobrazení  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dané předpisem  $f(x) = |x|$  je homomorfismem grupy  $(\mathbb{R}, +)$  do sebe.
  - (h) **ano** — **ne** Podokruh tělesa je těleso.
2. (7 bodů) Definujte pojem relace mezi množinami  $A, B$ . Pomocí něj definujte formálně pojem zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Definujte pojmy injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení.
3. (5krát 2 body) Udejte příklad
  - (a) množin  $A$  a  $B$  takových, aby  $A \subseteq B$  a zároveň  $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ ;
  - (b) relace ekvivalence  $\rho$  na množině  $\mathbb{N}$  takové, aby některá třída rozkladu  $\mathbb{N}/\rho$  měla nekonečně mnoho prvků;
  - (c) uspořádané množiny, která má maximální prvek, jež je zároveň minimální;
  - (d) binární relace na množině  $\mathbb{N}$ , která je současně symetrická a antisymetrická;
  - (e) binární operace na množině  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , která je asociativní a má neutrální prvek.
4. (10 bodů) Na množině  $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  definujeme binární operaci  $\circ$  vztahem  $(a, b) \circ (c, d) = (a + c - ac, b + d)$ , pro  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Dokažte, že operace  $\circ$  je asociativní. Rozhodněte, zda je operace  $\circ$  komutativní. Existuje pro  $\circ$  neutrální prvek? Je  $(M, \circ)$  grupa? Odpovědi zdůvodněte.
5. (10 bodů) Nechť konečná množina  $A$  má 6 prvků. Určete kolik je bijekcí  $f : A \rightarrow A$ , které jsou inverzní samy k sobě (tj.  $f = f^{-1}$ ). Výpočet komentujte.
6. (10 bodů) Na množině  $\mathbb{Q}$  je definována binární relace  $\rho$  vztahem  $x\rho y \iff (\exists a, b \in \mathbb{N})(ax = by)$ , pro  $x, y \in \mathbb{Q}$ . Dokažte, že  $\rho$  je relace ekvivalence na množině  $\mathbb{Q}$ . Popište rozklad  $\mathbb{Q}/\rho$ . Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.
7. (10 bodů) Definujme binární relaci  $\preceq$  na množině  $\mathbb{Z}$  takto:  $x \preceq y \iff (x = y \vee |x| < |y|)$ , pro  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Dokažte, že  $\preceq$  je uspořádání na  $\mathbb{Z}$ . Naznačte Hasseovský diagram uspořádané množiny  $(\mathbb{Z}, \preceq)$ . Popište minimální a maximální prvky  $(\mathbb{Z}, \preceq)$ . Rozhodněte, zda má libovolná dvouprvková podmnožina v  $(\mathbb{Z}, \preceq)$  supremum. Odpovědi zdůvodněte.
8. (10 bodů) Buď dána množina  $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Na množině  $M$  definujeme uspořádání  $\preceq$  takto:  $(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subseteq X' \wedge Y \subseteq Y')$ , pro  $X, Y, X', Y' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Definujme dále zobrazení  $f : M \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  předpisem  $f((X, Y)) = X \div Y$ . Rozhodněte, zda je zobrazení  $f$  surjektivní. Rozhodněte, zda je zobrazení  $f$  injektivní. Je zobrazení  $f : (M, \preceq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  izotonní? Rozhodněte, zda je  $(M, \preceq)$  úplný svaz. Odpovědi zdůvodněte.