Základy matematiky — podzim 2004 — 2. opravný termín — 28.1.2005

1. (8krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Existuje bijekce z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{Q}$.

(b) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je bijekce $\implies$ (f je bijekce $\vee$ g je bijekce).

(c) **ano — ne** Pokud binární relace R na množině A je symetrická, pak R^{-1} je antisymetrická.

(d) **ano — ne** Pokud R je uspořádání množiny A, pak R^{-1} je také uspořádání množiny A.

(e) **ano — ne** Pro libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$ je identické zobrazení $id_A : (A, \leq) \to (A, \leq)$ izotonní.

(f) **ano — ne** Podgrupy dané grupy tvoří úplný svaz vzhledem k uspořádání inkluzí.

(g) **ano — ne** Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = |x|$ je homomorfismem grupy $(\mathbb{R}, +)$ do sebe.

(h) **ano — ne** Podokruh tělesa je těleso.

2. (7 bodů) Definujte pojem relace mezi množinami A, B. Pomocí něj definujte formálně pojem zobrazení z množiny A do množiny B. Definujte pojmy injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení.

3. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) množin A a B takových, aby $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq \mathcal{P}(A)$;

(b) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{N}$ takové, aby některá třída rozkladu $\mathbb{N}/\rho$ měla nekonečně mnoho prvků;

(c) uspořádané množiny, která má maximální prvek, jež je zároveň minimální;

(d) binární relace na množině $\mathbb{N}$, která je současně symetrická a antisymetrická;

(e) binární operace na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která je asociativní a má neutrální prvek.

4. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem $(a, b) \circ (c, d) = (a + c - ac, b + d)$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Dokažte, že operace $\circ$ je asociativní. Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní. Existuje pro $\circ$ neutrální prvek? Je $(M, \circ)$ grupa? Odpovědi zdůvodněte.

5. (10 bodů) Nechť konečná množina A má 6 prvků. Určete kolik je bijekcí $f : A \to A$, které jsou inverzní samy k sobě (tj. $f = f^{-1}$). Výpočet komentujte.

6. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Q}$ je definována binární relace ρ vztahem $x \rho y \iff (\exists a, b \in \mathbb{N})(ax = by)$, pro $x, y \in \mathbb{Q}$. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Q}$. Popište rozklad $\mathbb{Q} \backslash \rho$. Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

7. (10 bodů) Definujme binární relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{Z}$ takto: $x \preceq y \iff (x = y \vee |x| < |y|)$, pro $x, y \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání na $\mathbb{Z}$. Naznačte Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbb{Z}, \preceq)$. Popište minimální a maximální prvky $(\mathbb{Z}, \preceq)$. Rozhodněte, zda má libovolná dvouprvková podmnožina v $(\mathbb{Z}, \preceq)$ supremum. Odpovědi zdůvodněte.

8. (10 bodů) Buď dána množina $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Na množině M definujeme uspořádání $\preceq$ takto: $(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subseteq X' \wedge Y \subseteq Y')$, pro $X, Y, X', Y' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definujme dále zobrazení $f : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ předpisem $f((X, Y)) = X \div Y$. Rozhodněte, zda je zobrazení f surjektivní. Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní. Je zobrazení $f : (M, \preceq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní? Rozhodněte, zda je $(M, \preceq)$ úplný svaz. Odpovědi zdůvodněte.