(Drsná) Matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Přednáška 4

1.28. Obsah trojúhelníka a viditelnost. Závěrem pojem obsah. Trojúhelník je vymezen dvojicí vektorů v a w, které přiloženy do počátku O zadají zbylé dva vrcholy.

Chceme formuli (skalární funkci vol), která dvěma vektorům přiřadí číslo rovné obsahu $\operatorname{vol}\Delta(v,w)$ takto definovaného trojúhelníku $\Delta(v,w)$.

Ze zadání je vidět, že by mělo platit

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\Delta(v+v',w) &= \operatorname{vol}\Delta(v,w)+\operatorname{vol}\Delta(v',w)\\ \operatorname{vol}\Delta(av,w) &= a\operatorname{vol}\Delta(v,w)\end{aligned}$$

a přidejme požadavek

$$\operatorname{vol}\Delta(v,w) = -\operatorname{vol}\Delta(w,v),$$

který odpovídá představě, že opatříme plochu znaménkem podle toho, v jakém pořadí bereme vektory.

Pokud vektory v a w napíšeme do sloupců matice A, pak

$$A = (v, w) \mapsto \det A$$

splňuje všechny tři naše požadavky.

Kolik takových zobrazení ale může být? Každý vektor umíme vyjádřit pomocí dvou souřadných vektorů $v = (1, 0)$ a $w = (0, 1)$, proto $\operatorname{vol}\Delta$ je jednoznačně určeno už vyčíslením na této jediné dvojici argumentů (v, w).

Všechny možnosti jsou si rovny až na skalární násobek. Ten umíme určit požadavkem

$$\operatorname{vol}\Delta((1, 0), (1, 0)) = \frac{1}{2},$$

tj. volíme *orientaci* a *měřítko*.

Determinant zadává plochu rovnoběžnostěnu určeného sloupci matice A (a plocha trojúhelníku je tedy poloviční).

1.29. Viditelnost v rovině. Předchozí popis $\Longrightarrow$ elegantní nástroj pro určování viditelnosti orientovaných úseček.

Orientovaná úsečka – dva body v rovině $\mathbb{R}^2$ s určeným pořadím
– šipka od prvého k druhému bodu.

rozděluje rovinu na dvě poloroviny, říkejme jim „levá“ a „pravá“.

Jestliže uvažujeme obvyklou orientaci „proti směru hodinových ručiček“, pak pozorovatel nalevo od orientované úsečky tuto vidí, a naopak pozorovatel napravo ji nevidí.

Má tedy smysl ptát se, jestli je orientovaná úsečka $[A, B]$ v rovině viditelná z bodu C.

Orientovanou plochu příslušného trojúhelníku zadaného vektory $A - C$ a $B - C$. Pokud jsme s bodem C nalevo od úsečky, pak při naší orientaci bude vektor $A - C$ dříve než ten druhý a proto výsledná plocha (tj. hodnota determinantu) bude kladná.

To odpovídá situaci, kdy úsečku vidíme. Naopak, při opačné poloze bude výsledkem záporná hodnota determinantu a podle zjistíme, že úsečku nevidíme.

Uvedený jednoduchý postup je často využíván pro testování polohy při standardních úlohách v 2D grafice.

6. Relace a zobrazení

formální popis matematických struktur – cvičení v formálním přístupu k objektům a konceptům matematiky.

1.30. Relace mezi množinami. *Binární relací* mezi množinami A a B rozumíme podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Často píšeme $a \sim_R b$ (nebo i vypouštíme jméno R. pokud je jasné z kontextu) pro vyjádření skutečnosti, že $(a, b) \in R$, tj. že body $a \in A$ a $b \in B$ jsou v relaci R. *Definičním oborem relace* je podmnožina

$$D \subset A, \quad D = \{a \in A; \exists b \in B, (a, b) \in R\}.$$

Podobně *oborem hodnot relace* je podmnožina

$$I \subset B, \quad I = \{b \in B; \exists a \in A, (a, b) \in R\}.$$

Inverzní relací k R se nazývá relace mezi množinami B a A

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A; (a, b) \in R\}$$

Speciálním případem relace mezi množinami je *zobrazení z množiny A do množiny B*. Je to případ, kdy pro každý prvek definičního oboru relace existuje právě jeden prvek z oboru hodnot , který je s ním v relaci. V takovém případě nejčastěji používáme značení jako jsme viděli u skalárních funcí

$$f : D \subset A \to I \subset B, f(a) = b$$

pro vyjádření skutečnosti, že (a, b) patří do relace. Říkáme, že f je

- zobrazení množiny A do množiny B, jestliže je $D = A$,
- zobrazení množiny A na množinu B, jestliže je $D = A$ a $I = B$, často také *surjektivní zobrazení*
- *injektivní zobrazení*, jestliže je $D = A$ a pro každé $b \in I$ existuje právě jeden *vzor* $a \in A$, $f(a) = b$.

1.31. Skládání relací a funkcí. R, S relace mezi množinami A, B, C jejich složení (jako u funkcí - viz tabule)

1.32. Relace na množině. V případě $A = B$ hovoříme o relaci na množině A. Říkáme, že R je:

- *reflexivní*, pokud $\mathrm{id}_A \subset R$ (tj. $(a, a) \in R$ pro všechny $a \in A$),
- *symetrická*, pokud $R^{-1} = R$ (tj. pokud $(a, b) \in R$, pak i $(b, a) \in R$),
- *antisymetrická*, pokud $R^{-1} \cap R = \mathrm{id}_A$ (tj. pokud $(a, b) \in R$ a zároveň $(b, a) \in R$), pak $a = b$,
- *tranzitivní*, pokud $R \circ R \subset R$, tj. pokud z $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ vyplývá i $(a, c) \in R$.

Relace se nazývá ekvivalence, pokud je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní. Relace se nazývá *uspořádání* jestliže je reflexivní, tranzitivní a *antisymetrická*.

1.33. Rozklad podle ekvivalence. Každá ekvivalence na množině A zadává zároveň *rozklad* množiny A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. *třídy ekvivalance.* Každá taková podmnožina je reprezentována kterýmkoliv svým prvkem, tzv. *reprezentantem.*

1.34. Příklad. – uspořádání, částečné uspořádání, úplné uspořádání, dobré uspořádání

(viz tabule - podmnožiny konečné množiny, přirozená čísla)

1.35. Příklad – konstrukce celých a racionálních čísel. (viz tabule - celá čísla = třídy ekvivalence, podobně racionální, důležitá k ověření, že takové objekty vůbec existují)

1.36. Příklad – zbytkové třídy. (viz tabule - méně obvyklé skaláry ...)