(Drsná) Matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Přednáška 4

KAPITOLA 2

Linární modely

1. Vektory a matice

2.1. Vektory nad skaláry. Symbol $\mathbb{K}$ bude nadále značit nějakou množinu skalárů.

Prozatím: *vektor* bude uspořádaná n-tice skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat *dimenzí.*

Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme). Násobení vektoru $u = (a_1, \dots, a_n)$

skalárem b definujeme tak, že každý prvek n-tice u vynásobíme skalárem b (skaláry v $\mathbb{K}$ násobit umíme), tj.

$$b \cdot u = b \cdot (a_1, \dots, a_n) = (b \cdot a_1, \dots, b \cdot a_n).$$

Zpravidla požadujeme, aby skaláry byly z nějakého pole, viz 1.1.

Pro sčítání vektorů v $\mathbb{K}^n$ zjevně platí (KG1)–(KG4) s nulovým prvkem

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Schválně zde používáme pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů. Podobně budeme pro sčítání a násobení používat stále stejný symbol (buď tečku nebo prosté zřetězení znaků). Navíc nebudeme používat pro vektory žádné speciální značení, spíše ale budeme pro skaláry používat písmena ze začátku abecedy a pro vektory spíše od konce.

Pro všechny vektory v, $w \in \mathbb{K}^n$ a skaláry a, $b \in \mathbb{K}$ platí

$$\text{(V1)} \qquad a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$$

$$\text{(V2)} \qquad (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

$$\text{(V3)} \qquad a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$$

$$\text{(V4)} \qquad 1 \cdot v = v$$

Pro kterékoliv pole skalárů $\mathbb{K}$ se snadno ověří právě sformulované vlastnosti (V1)–(V4) pro $\mathbb{K}^n$, protože při ověřování vždy používáme pouze vlastnosti skalárů uvedené v 1.1 a 1.2. Budeme takto pracovat např. s $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $(\mathbb{Z}_k)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Všimněme si také, že k ověření vlastností (V1)–(V4) potřebujeme pro použité skaláry pouze vlastnosti okruhu. Vlastnost (P) však bude přesto podstatná později.

2.2. Matice nad skaláry. Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme *řádky matice* A, $i = 1, \dots, m$, vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme sloupce matice A, $j = 1, \dots, n$.

Matici můžeme také chápat jako zobrazení $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$. Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně právě vektory v $\mathbb{K}^n$. I obecné matice lze však chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m.n}$, prostě zapomeneme na řádkování. Zejména tedy je definováno sčítání matic a násobení matic skaláry:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$a \cdot A = (a.a_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $a \in \mathbb{K}$. Dále pak

$$-A = (-a_{ij})$$

se nazývá *matice opačná* k matici A a

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Zapomenutím řádkování tak získáme následující tvrzení:

Tvrzení. *Předpisy pro* $A+B$, $a \cdot A$, $-A$, 0 *zadávají na množině všech matic typu* m/n *operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).*

2.3. Příklad. Matice lze vhodně využít pro zápis lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_m
\end{aligned}
$$

posloupnost $x_1, \dots, x_n$ lze chápat jako vektor proměnných, tjšloupec, a podobně s hodnotami $y_1, \dots, y_n$. Systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A.x = y$:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
$$

Původní rovnice nyní obdržíme tak, že vždy bereme řádky z A a sčítáme součiny odpovídajících komponent $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$. Tím získáme i-tý prvek výsledného vektoru. V rovině, tj. pro vektory dimenze 2 jsme už zavedli takovýto kalkul a viděli jsme, že s ním lze pracovat velice efektivně. Nyní budeme postupovat obecněji a zavedeme i na maticích operace násobení.

2.4. Součin matic. Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad $\mathbb{K}$ definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le q.$$

Například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5. Čtvercové matice. Je-li v matici stejný počet řádků a sloupců, hovoříme o *čtvercové matici*. Počet řádků a sloupců pak nazýváme také dimenzí matice.

Matici

$$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se říká *jednotková matice*. Na množině čtvercových matic nad $\mathbb{K}$ dimenze n je součin matic definován pro každé dvě matice, je tam tedy definována operace násobení:

Tvrzení. *Pro libovolný okruh skalárů je na množině všech čtvercových matic dimenze n definována operace násobení. Splňuje vlastnosti 1.2(O1) a (O3) z vzhledem k jednotkové matici $E = \delta_{ij}$. Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje 1.2(O4). Obecně však neplatí 1.2(O2) ani (OI), zejména tedy neplatí 1.2(P).*

DŮKAZ. Asociativita násobení – (O1):

$$A = (a_{ij}) \text{ typu } m/n, \quad B = (b_{jk}) \text{ typu } n/p, \quad C = (c_{kl}) \text{ typu } p/q$$

$$A \cdot B = (\sum_j a_{ij}.b_{jk}), \quad B \cdot C = (\sum_k b_{jk}.c_{kl})$$

$$(A \cdot B) \cdot C = (\sum_k (\sum_j a_{ij}.b_{jk}).c_{kl}) = \sum_{j,k} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (\sum_j a_{ij}.(\sum_k b_{jk}.c_{kl})) = \sum_{j,k} a_{ij}.b_{jk}.c_{kl}$$

Jednotkový prvek – (O3):

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A = E \cdot A$$

(O4) - distributivita: $A = (a_{ij})$ typu m/n, $B = (b_{jk})$ typu n/p, $C = (c_{jk})$ typu n/p, $D = (d_{kl})$ typu p/q

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= (\sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = ((\sum_j a_{ij}b_{jk}) + (\sum_j a_{ij}c_{jk})) \\ &= A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot D &= (\sum_k (b_{jk} + c_{jk})d_{kl}) = ((\sum_k b_{jk}d_{kl}) + (\sum_k c_{jk}d_{kl})) \\ &= B \cdot D + C \cdot D \end{aligned}$$

Není komutativní: - dokážeme na příkladu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tím jsme získali zároveň protipříklad na platnost (O2) i (OI), zatím ale jen pro matice typu $2/2$. Pro matice typu $1/1$ ovšem oba axiomy samozřejmě platí, protože je mají samy skaláry a pro větší matice získáme protipříklady snadno tak, že právě uvedené matice umístíme do levého horního rohu příslušných čtvercových schémat a doplníme nulami. (Ověřte si sami!) $\square$