(Drsná) Matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Přednáška 3

1.21. Podmíněná pravděpodobnost. Dotazy s dodatečnou podmínkou:

Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěmi kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?“.

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností pro jevy $A_1, \dots, A_k$ splňující $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_k) &= \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}). \end{aligned}$$

Pokrácení čitatelů a jmenovatelů přímo dá výsledek.

1.22. Geometrická pravděpodobnost. Často složitějšími modely, kde základní prostor není konečnou množinou.

Uvedeme jednoduchou ilustraci.

Rovina $\mathbb{R}^2$ dvojic reálných čísel, podmnožina Ω se známým obsahem $\operatorname{vol}\Omega$ (symbol „vol" od anglického „volume", tj. obsah/objem). Např. jednotkový čtverec.

Náhodné jevy – podmnožiny $A \subset \Omega$.

Jevové pole $\mathcal{A}$ – systém podmnožin, u kterých umíme určit jejich obsah (třeba všechna konečná sjednocení trojúhelníků).

Nastoupení nebo nenastoupení jevu je dáno výběrem bodu v Ω, kterým se trefíme nebo netrefíme do množiny reprezentující jev A.

Podobně jako u klasické pravděpodobnosti je pravděpodobnostní funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

$$P(A) = \frac{\operatorname{vol} A}{\operatorname{vol}\Omega}.$$

Příklad: náhodně vyberem dvě hodnoty $a < b$ v intervalu $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Všechny hodnoty a i b jsou stejně pravděpodobné.

Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že interval (a,b) bude mít velikost alespoň jedna polovina?.

(viz tabule)

Výpočetní metody *Monte Carlo*:

Simulace známé pravděpodobnosti pomocí relativní četnosti nastoupení vhodně zvoleného jevu.

Např. obsah jednotkového kruhu je roven konstantě $\pi = 3,1415\ldots$.

Volíme za Ω jednotkový čtverec a za A průnik jednotkového kruhu se středem v počátku.

Pak $\operatorname{vol} A = \frac{1}{4}\pi$.

Obdobné úlohy na geometrickou pravděpodobnost lze bezezbytku formulovat v $\mathbb{R}^3$ a obecněji.

5. Geometrie v rovině

1.23. Afinní rovina a vektorový prostor $\mathbb{R}^2$. Nekonečná deska bez jakýchkoliv zvolených měřítek a popisů, ale a víme, co to znamená posunout se v libovolném násobku nějakého směru.

Volba *(afinního) souřadného systému v rovině* – bod O je jeho *počátkem*, posunutí $E_1 - O$ ztotožňujeme s dvojicí $[1, 0]$, podobně u E_2 s $[0, 1]$.

Obecně každý bod P roviny je ztotožněn s dvojicí čísel $[a, b] = P - O$.

Posunutí umíme skládat (budeme říkat „sčítat") a také jednotlivé směry násobit v poměru každého reálného čísla (budeme říkat „násobit skalárem").

Podobné vlastnosti ke sčítání a násobení skalárů – dvourozměrný reálný vektorový prostor.

1.24. Přímky v rovině. *Přímka* je podmnožina $p \subset A$ v rovině taková, že existují bod O a vektor v takové, že

$$p = \{P \in A;\ P - O = t \cdot v,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Popišme si $P = P(t) \in p$ ve zvolených souřadnicích s volbou $v = (\alpha, \beta)$:

$$x(t) = x_0 + \alpha \cdot t, \quad y(t) = y_0 + \beta \cdot t.$$

Spočteme

$$-\beta x + \alpha y + (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0.$$

To je obecná rovnice přímky

$$ax + by = c, \tag{1.2}$$

se známým vztahem dvojice čísel (a, b) a vektoru $v = (\alpha, \beta)$

$$a\alpha + b\beta = 0. \tag{1.3}$$

Výraz nalevo v rovnici přímky – skalární funkce F závislá na bodech v rovině a s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Rovnice – požadavek na její hodnotu. Vektor (a, b) je směrem, ve kterém F nejrychleji roste. Směr kolmý na (a, b) je směrem, ve kterém zůstává F konstantní.

Konstanta c určuje, pro které body bude tato konstanta nula.

Dvě přímky p a q – jaký je průnik $p \cap q$?

Je to bod, splňující obě rovnice přímek naráz.

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Levá strana – přiřazení, které každé dvojici souřadnic $[x(P), y(P)]$ bodů v rovině přiřadí vektor hodnot dvou skalárních funkcí F_1 a F_2 daných levými stranami jednotlivých rovnic (1.4).

$$F(v) = w$$

1.25. Lineární zobrazení a matice. Přiřazení F respektuje operace sčítání a násobení s vektory a skaláry:

$$F(a \cdot v + b \cdot w) = a \cdot F(v) + b \cdot F(w)$$

pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Říkáme: F je *lineární zobrazení* z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$.

Píšeme $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Obdobně, v rovnici 1.2 pro přímku šlo o lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a jeho předepsanou hodnotu c.

Stručně budeme zapisovat taková zobrazení pomocí *matic* a jejich násobení:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Podobně, místo vektoru v můžeme zprava násobit jinou maticí B stejného rozměru jako je A – aplikace předchozí formule po jednotlivých sloupcích matice B.

Platí asociativita násobení:

$$(A \cdot B) \cdot v = A \cdot (B \cdot v).$$

Platí distributivita $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, neplatí však komutitativita a existují „dělitelé nuly“. Např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Body v rovině – obecně vzory hodnot lineárních zobrazení F roviny do roviny.

Přímky – obecně vzory hodnot lineárních zobrazení z roviny do reálné přímky $\mathbb{R}$.

Ve zvláštních situacích je to jinak:

Průnikem dvou stejných přímek je opět sama přímka (a vzorem vhodné hodnoty pro takové lineární zobrazení bude celá přímka), nulové zobrazení má za vzor nuly celou rovinu.

oznáme pomocí vztahu

$$\det A = ad - bc = 0 \tag{1.5}$$

– nalevo jsou v rovnicích stejné výrazy až na skalární násobek. Pak v průniku buď žádný bod (rovnoběžné různé přímky) nebo tam jsou všechny body přímky (stejné přímky).

Výrazu nalevo v (1.5) říkáme *determinant* matice A.

Dovolíme přičítání pevných vektorů $T = (x(T), y(T))$,

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot v + T = \begin{pmatrix} ax + by + x(T) \\ cx + dy + y(T) \end{pmatrix},$$

– všechna *afinní zobrazení roviny* do sebe.

Všechny afinní podobnosti. Lineární zobrazení odpovídají těm afinním, které zachovávají pevný bod O.

Když pozorovatel tutéž rovinu bude shlížet z jiného bodu nebo si aspoň vybere jiné body E_1, E_2 – na úrovni souřadnic to bude změna realizovaná pomocí afinního zobrazení.

1.26. Euklidovská rovina. Přidáme schopnost vidět vzdálenosti.

Okamžitě pojmy úhel a otočení v rovině.

Vzorec pro velikost vektoru $v = (a, b)$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Úhel ϕ dvou vektorů v, w – využitím tzv. goniometrické funkce $\cos\phi$.

(viz tabule)

Obecně pro dva vektory $v = (x(v), y(v)), w = (x(w), y(w))$ je jejich úhel:

$$\cos\phi = \frac{x(v) \cdot x(w) + y(v) \cdot y(w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Dobrým příkladem: rotace o předem daný úhel ψ. Je dáno formulí s maticí R_ψ:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R_\psi \cdot v = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pro jednotkový vektor $(1,0)$ dostáváme skutečně právě očekávaný výsledek $(\cos\psi, \sin\psi)$.

Rotace kolem jiného bodu $P = O + w$, snadno napíšeme formuli pomocí translací:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v \mapsto v - w \mapsto R_\psi \cdot (v - w) \mapsto R_\psi \cdot (v - w) + w$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi(x - x(w)) - \sin\psi(y - y(w)) + x(w) \\ \sin\psi(x - x(w)) + \cos\psi(y - y(w)) + y(w) \end{pmatrix}.$$

Zrcadlení vzhledem k přímce – bude stačit popsat zrcadlení vzhledem k přímkám procházejícím počátkem O a ostatní se z nich odvodí pomocí translací.

Hledejme tedy matici Z_ψ zrcadlení vzhledem k přímce s jednotkovým směrovým vektorem v svírajícím úhel ψ s vektorem $(1,0)$. Např.

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a obecně můžeme psát (otočíme do „nulové“ polohy, odzrcadlíme a vrátíme zpět)

$$Z_\psi = R_\psi \cdot Z_0 \cdot R_{-\psi}.$$

(viz tabule)

$$
\begin{aligned}
R_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\psi - \sin^2\psi & 2\sin\psi\cos\psi \\ 2\sin\psi\cos\psi & -(\cos^2\psi - \sin^2\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Povšimněme si také, že

$$
Z_\psi \cdot Z_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}.
$$

To lze sformulovat jako

Tvrzení. *Otočení o úhel ψ obdržíme následným provedením dvou zrcadlení vzhledem ke směrům, které spolu svírají úhel $\frac{1}{2}\psi$.*

Poznámka – pokud umíme odůvodnit předchozí tvrzení ryze geometrickou úvahou (zkuste), dokázali jsme právě standardní formule pro goniometrické funkce dvojnásobného úhlu.

Hlubší je následující rekapitulace předchozích úvah:

1.27. Věta. *Lineární zobrazení euklidovské roviny je složeno ze zrcadlení právě, když je dáno maticí R splňující*

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ab + cd = 0, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1.$$

To nastane právě, když toto zobrazení zachovává velikosti. Otočením je přitom právě tehdy, když je determinant matice R roven jedné, což odpovídá sudému počtu zrcadlení. Při lichém počtu zdrcadlení je determinant roven -1.

(viz tabule)

1.28. Obsah trojúhelníka a viditelnost. Závěrem pojem obsah. Trojúhelník je vymezen dvojicí vektorů v a w, které přiloženy do počátku O zadají zbylé dva vrcholy.

Chceme formuli (skalární funkci vol), která dvěma vektorům přiřadí číslo rovné obsahu $\operatorname{vol}\Delta(v,w)$ takto definovaného trojúhelníku $\Delta(v,w)$.

Ze zadání je vidět, že by mělo platit

$$\operatorname{vol}\Delta(v+v',w) = \operatorname{vol}\Delta(v,w) + \operatorname{vol}\Delta(v',w)$$
$$\operatorname{vol}\Delta(av,w) = a\operatorname{vol}\Delta(v,w)$$

a přidejme požadavek

$$\operatorname{vol}\Delta(v,w) = -\operatorname{vol}\Delta(w,v),$$

který odpovídá představě, že opatříme plochu znaménkem podle toho, v jakém pořadí bereme vektory.

Pokud vektory v a w napíšeme do sloupců matice A, pak

$$A = (v, w) \mapsto \det A$$

splňuje všechny tři naše požadavky.

Kolik takových zobrazení ale může být? Každý vektor umíme vyjádřit pomocí dvou souřadných vektorů $v = (1, 0)$ a $w = (0, 1)$, proto $\operatorname{vol} \Delta$ je jednoznačně určeno už vyčíslením na této jediné dvojici argumentů (v, w).

Všechny možnosti jsou si rovny až na skalární násobek. Ten umíme určit požadavkem

$$\operatorname{vol} \Delta((1, 0), (1, 0)) = \frac{1}{2},$$

tj. volíme *orientaci* a *měřítko*.

Determinant zadává plochu rovnoběžnostěnu určeného sloupci matice A (a plocha trojúhelníku je tedy poloviční).