Příklady na cvičení k přednášce Matematika I
k odevzdání v týdnu 21. – 25. listopadu 2005

Příklad 1. *Uvažujme reálné polynomiální funkce (tj. funkce tvaru $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \ldots k$) s operací sčítání funkcí. Ukažte, že jde o vektorový prostor nad reálnými čísly a napište nějakou jeho bazi. Jaká je jeho dimenze?*

Příklad 2. *Rozhodněte o následujících tvrzeních, jestli jsou pravdivá, či nepravdivá, své tvrzení zdůvodněte:*

1. *Každá matice nad $\mathbb{R}$ má alespoň jeden vlastní vektor.*
2. *Každá matice nad $\mathbb{C}$ má alespoň jeden vlastní vektor.*
3. *Každá matice nad $\mathbb{R}$ má tolik vlastních vektorů, jaká je její hodnost.*
4. *Každá matice nad $\mathbb{C}$ má tolik vlastních vektorů, jaká je její hodnost.*

Příklad 3. *Rozhodněte, jestli může být Leslieho matice maticí Markovovou (tj. pravděpodobnostní). Pokud ano, popište populaci, kterou tato matice popisuje. Pokud ne, podejte důkaz svého tvrzení.*

Příklad 4. *Navrhněte lineární filtr, tj. lineární zobrazení z vektorového prostoru nekonečných posloupností do sebe sama, takový, že utlumí (odfiltruje) posloupnosti tvaru $x_n = \sin(n\pi/3)$. Které posloupnosti tento filtr naopak zesílí?*

Příklad 5. *Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 400 Kč. Vždy vsadí polovinu toho, co aktuálně má (a to zaokrouhleno na patesátikoruny nahoru; vsázet se totiž může pouze v násobcích 50 Kč). Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud má více než 1000 Kč. Zformulujte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.*

Pokud máte přístup k výpočetnímu softwaru, zkuste tento proces modelovat. Spočtěte vlastní čísla a vlastní hodnoty dané matice. Interpretujte výsledek.