

Příklad 1. Určete počet přesmyček slova „nejneobhospodářovatelnější“ takových, že v nich stojí skupina písmen „neo“ takto u sebe. (diakritiku neuvažujeme, tj. „á=a“)

Řešení. Skupinu „neo“ počítáme jako jedno písmeno. Zbytek standardně jako permutace s opakováním.

$$\frac{26!}{(3!)^3 2^4}$$

□

Příklad 2. V rovině \mathbb{R}^2 je v bodě $[0, -5]$ umístěn jediný světelný zdroj. Určete délku stínu, který vrhá neprůsvitný čtyřúhelník s vrcholy $[1, 5]$, $[4, 8]$, $[5, 11]$, $[2, 12]$ na přímkou $x = 20$.

Řešení. Stín se táhne od bodu $[20, 59]$, do bodu $[20, 195]$, jeho délka je tedy 136.

□

Příklad 3. Ve standardní bázi v \mathbb{R}^3 je dáno lineární zobrazení f maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte jeho matici v bázi $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Řešení. Matice přechodu od báze B ke standardní bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledanou matici D spočteme jako

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 4. Určete vzdálenost přímek p a q v afinním prostoru \mathbb{R}^3 , je-li přímka p dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x - y + z + 2 &= 0 \\ x + 2y + 2z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Přímka q potom rovnicemi

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ y + z &= 2. \end{aligned}$$

Řešení. Směrové vektory přímek p a q jsou $(-4, -1, 3)$ a $(3, 2, -2)$ (jsou to řešení zlinealizovaných rovnic, alternativně vektorové součiny normál definujících rovin). Vektorovým součinem zjistíme vektor kolmý na obě dvě, tedy vektor $(4, -1, 5)$. Na přímkou p leží např. bod $P = [-3, 1, 2]$ a na q leží např. bod $Q = [2, 1, 1]$. Promítnutím vektoru $PQ = (5, 0, -1)$ na podprostor generovaný vektorem $(4, -1, 5)$ získáme vektor

$$\frac{1}{5} \|(4, -1, 5)\|^2 (4, -1, 5),$$

jehož délka je $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$.

□

Příklad 5.

1. Definujte pojem relace. Udejte příklad neprázdné relace na množině $\{1, 2, 3\}$
2. Definujte matici přechodu.
3. Formulujte větu o Jordanově rozkladu

Řešení.

1. Viz kapitola 1, bod 6.1.
2. Viz kapitola 2, bod 3.10.
3. Viz kapitola 2, Věta 4.7.

□