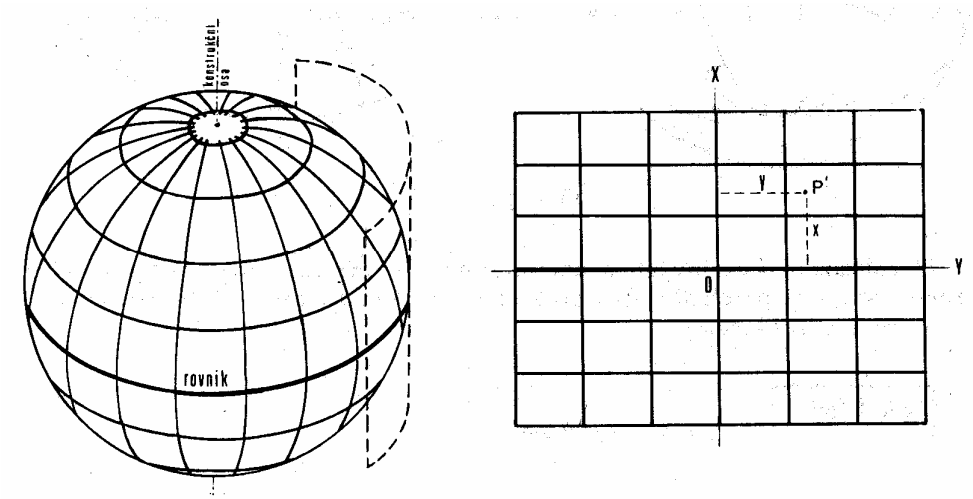
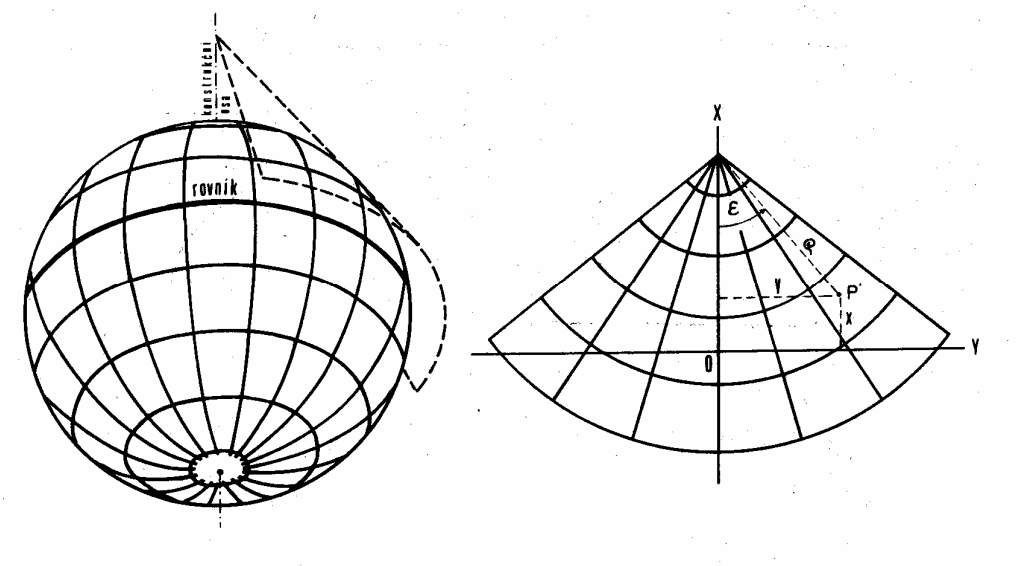
Pojmy související s GIS

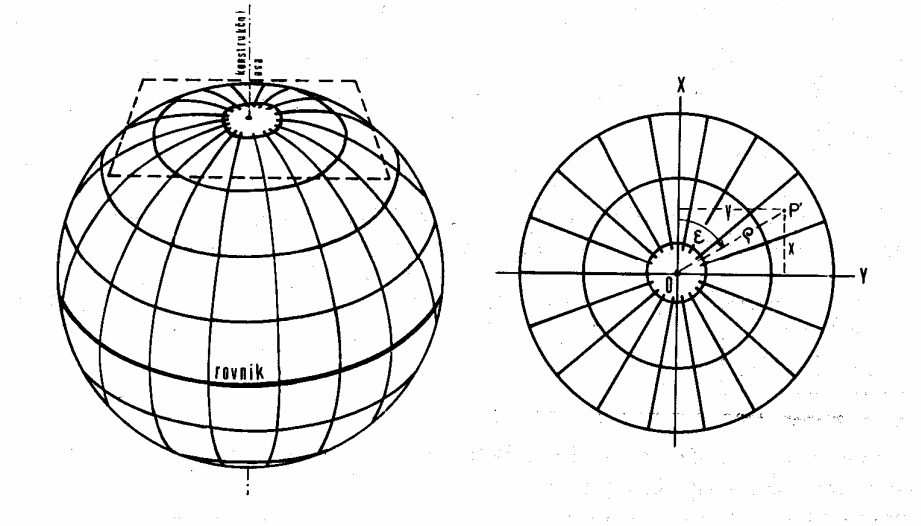
- ***<u>Matematická kartografie</u>*** **- disciplína zabývající se převodem zemského povrchu (modelovaného elipsoidem) do roviny. Volí vhodná kartografická zobrazení, tedy funkce zobrazující elipsoid do roviny.**



Válcové zobrazení



Kuželové zobrazení



Azimutální zobrazení

***Ekvidistantní zobrazení* - nezkresluje délky určité soustavy. Zpravidla touto soustavou bývají zeměpisné poledníky nebo rovnoběžky. Nelze definovat ekvidistantní zobrazení, které by nezkreslovalo žádné délky.**

***Ekvivalentní zobrazení* - nezkresluje plochy, zkreslení úhlů je však zde poměrně značné, což se projevuje zejména ve tvarech ploch.**

***Konformní zobrazení* - ponechává nezkreslené úhly, značně jsou však zde zkreslovány plochy.**

- **V textu se těmito pojmy dále nezabýváme, budeme předpokládat, že prostorová data jsou lokalizována ve vhodném souřadném systému.**

- ***Mapování*** **- vytváření map měřením nebo fotogrammetrickým mapováním pomocí geodetických základů - bodů geodetických sítí.**

- ***Dálkový průzkum Země*** ***(DPZ)*** **- získávání informací o zemském povrchu a jeho blízkém okolí pomocí snímacích zařízení (kamery, skenery) umístěných v letadlech nebo družicích.**

- ***Topografická mapa*** **- je grafická prezentace (zobrazení) části zemského povrchu se standardizovaným obecným obsahem (voda, lesy, komunikace..)**

- ***Měřítko mapy*** **a** ***úroveň územní podrobnosti*** **obsahu geografického informačního systému**

- ***Tématická mapa*** **- zobrazení geografických dat a jevů v topografickém podkladu pomocí grafické reprezentace prostorových dat: bodů, linií a areálů. Metody reprezentace: bodové značky, lokalizované kartodiagramy, kartodiagramy, symbologie čar, kartogramy.**

Mapové dílo v ČR

Mapy velkých měřítek do 1:5000

- **katastrální mapy (mapy stabilního katastru) v systému Cassini-Soldner (počátek Gusterberg v Čechách, Sv. Štěpán na Moravě) v sáhových měřítkách 1:2880, 1:1440, 1:720 (měřítko je odvozeno ze vztahu 1 jitro - 1600 čtverečních sáhů - je zobrazeno jako čtvereční palec), ale i v dekadických měřítkách**

- **katastrální mapy v S-JTSK (systém jednotné trigonometrické sítě katastrální - Křovák), měřítka 1:1000 ve městech (intravilán), 1:2000 v extravilánu vznikaly po roce 1928**

- **Státní mapa odvozená v měřítku 1:5000, systém JTSK, obsah: vlastnické hranice, polohopis (vnitřní kresba)**

- **Digitální katastrální mapa - mapu vedenou digitálně postupně vytvářejí katastrální úřady**

Státní mapové dílo velkých měřítek v České republice

Vznikalo v průběhu dvou století. Mapové dílo je charakteristické svou rozmanitostí a rozdílnou kvalitou (především vzhledem k přesnosti a aktuálnosti mapy). Tento stav je způsoben programovým rušením vlastnických vztahů v minulosti a několika neúspěšnými pokusy geodetů mapové dílo sjednotit.

Technické mapy měřítka 1:500 (a větších měřítek)

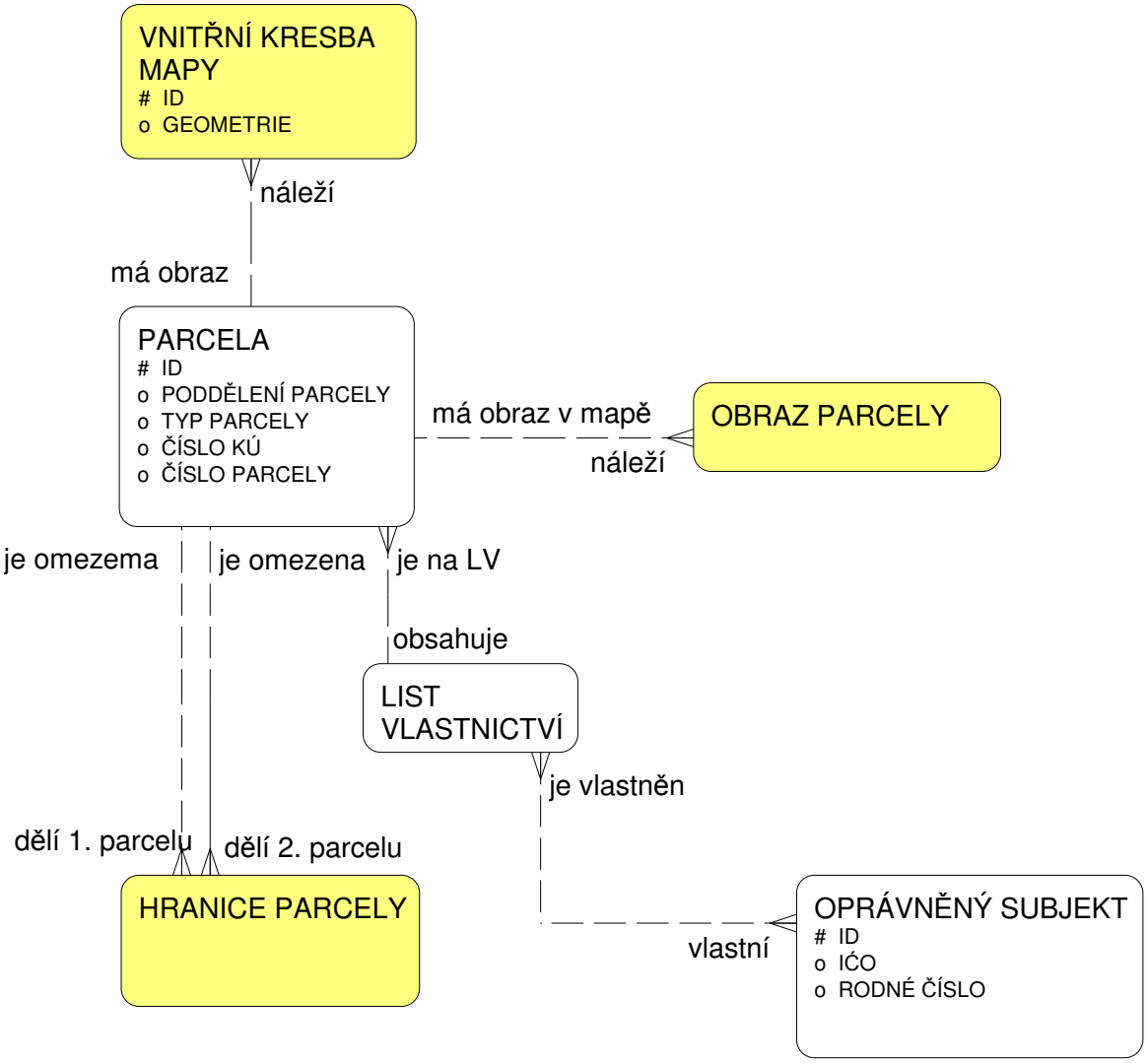
jsou vytvářeny v systému JTSK s obsahem: polohopis, sítě, čísla popisná, podle konkrétního území a záměru autora a uživatele mapy.

Mapy středních měřítek 1 : 10000 až 1 : 200 000

- **Základní mapa středního měřítka - v měřítkách 1:10000, 1:25000, 1:50000, 1:100000, 1:20000 s obsahem topografické mapy**

- **Topografická mapa GŠ ČSA, měřítko 1:25000 (v některém území i 1:10000)**

Příklad 1 - Informační systém o nemovitostech



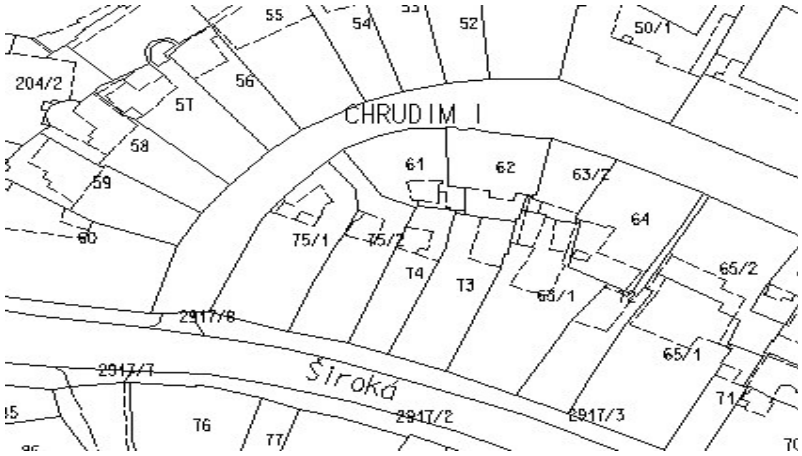
Uvažujme „klasický“ informační systém o nemovitostech s datovým modelem v relačním databázovém systému, entity systému jsou navrženy v E-R diagramu. Klasický IS je schopen reagovat na dotazy typu:

- ***kdo vlastní parcelu ..?.***

- ***jaké parcely vlastní osoba ...?; jakou cenu mají parcely, které vlastní osoba …?***

GIS jsou navrhovány tak, aby byly schopny reagovat na dotazy typu:

- ***kde se nalézá parcela ...?***
- ***jaké typy parcel se nalézají v daném regionu ...?***
- ***Jakou výměru parcel vlastní daný Oprávněný subjekt***



GIS je jakýkoliv manuálně nebo počítačově založený soubor postupů užívaných k ukládání a manipulování geograficky vztažených dat. *Geograficky vztažená data* mají dvě složky:

- **fyzikální rozměr respektive třídu (průměrná výška stromů v lese, počet obyvatel města, šířka silnice respektive typ sídla, typ vegetace, geomorfologický typ, apod.)**

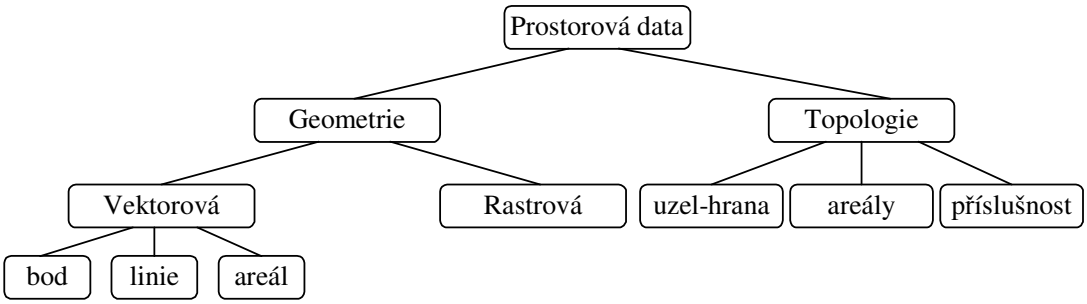
- **prostorovou lokalizaci ve vztahu ke zvolenému souřadnému systému (polární souřadnice, souřadnice ve zvoleném systému kartografického zobrazení)**

Typy GIS – tradiční dělení

- **Land Information System (LIS), Land Related Information System (LRIS), územně orientovaný informační systém - speciální případ GIS v podrobnosti velkého měřítka, který zahrnuje vlastnické vztahy (hranice parcel a informace o vlastnících parcel)**

- **Geoinformační systém - systém pracující s daty, která lze lokalizovat v území, ale ne vždy je lze považovat za geografická (umístění vodovodního šoupátka, dopravní značky).**

- **Grafický informační systém - systém pracující s obrazovými daty, která nemá smysl lokalizovat v nějakém (jednotném) prostoru.**
- **V posledních letech toto dělení ztrácí smysl po geoinformačních systémech je požadována komplexní funkcionalita.**



<u>Vektorová data</u> - reprezentují objekty pomocí datových struktur, jejichž základní položkou je bod 2-rozměrného spojitého (euklidovského) prostoru. Termínem "spojitý" myslíme spojitý, až na technické omezení použité počítačové aritmetiky.

<u>Rastrová data</u> - podmnožina 2D prostoru je pravidelně rozdělena (většinou čtvercovou) sítí, každý element této sítě je nositelem tématické části (geografické) informace. Prostorová lokalizace je určena indexem elementární složky sítě, popřípadě jeho zobrazením do cílového (kartografického) souřadného systému.

Grid data - Základem této reprezentace je opět pravidelná síť položená na 2D prostor. Rozdíl oproti rastrovým datům spočívá v tom, že tématická část informace je získávána na základě předem definované sítě, kterou je rozděleno zájmové území.

Topologie - vymezuje vztahy mezi entitami (objekty) systému, aniž by obsahovala umístění objektu v prostoru. Například informační systémy o spojení míst silniční sítí nevyžadují přesné umístění uzlů v prostoru, pracují pouze s relací na množině všech uzlů.

Jak reprezentovat prostorovou složku dat v GISech?

Povšimněme si objektů na *obr. 1* . Je vidět, že fragment mapy obsahuje prostorové informace těchto typů.

- **bod**
- **lomená čára (linie)**
- **oblast (areál)**

(Texty a značky budeme považovat také za bodové mají svůj referenční bod a velikost textu/značky je stále stejná, nemění se s měřítkem).

```
typedef struct
 {
  long x;
  long y;
 }
pointT;
```

Pevná řádová čárka je výhodná, vyhneme se problémům typu „dva různé body mají nulovou vzdálenost“, ale na druhé straně nelze počítat jen v celočíselné aritmetice.

```
double pointDist
(
 pointT *p1,
 pointT *p2
)
{
 double r;

 r=sqrt((p2->x-p1->x)*(p2->x-p1->x)+
        (p2->y-p1->y)*(p2->y-p1->y));
 return(r);
}
```

Špatně!!!

```
typedef struct
 {
  long double;
  long double;
 }
DPointT;

double DPointDist
(
 DPointT *p1,
 DPointT *p2
) …
```

Datové sklady prostorových GIS

Pro fyzickou reprezentaci je možné použít vlastních datových struktur a ukládat je přímo ve file systému operačního systému. Přes nesporné výhody tohoto přístupu, jako je optimalizace uložení prostorové složky informace, převažují nevýhody, zejména aplikační závislost.

Není jednotný standard ukládání vektorové geometrie.

Nejpoužívanější veřejné formáty:

Shape file (systém ARC/INFO fy. ESRI)

Geograficky vztažená informace je obsažena ve trojici souborů

- ***.shp** **prostorová informace**
- ***.shx** **prostorový index**
- ***.dbf** **popisná informace a topologické vazby**

Základní podporované geometrické primitivy:

`Point`	**bod**
`MultiPoint`	**body**
`MultiLine`	**lomené čáry**
`Polygon`	**Areál**

Vše 2D a 3D varianty.

Definice neobsahuje symbologii (barva, síla, styl linií, výplň polygonu). Tu obsluhuje aplikace na základě popisných informací.

DGN file, norma IGDS (Intergraph, Bentley)

Geometrická informace je obsažena v souboru *.DGN, soubor sám o sobě nenese popisnou informaci, ta je uložena v relační databázi (nebo *.dfb souboru), DGN soubor obsahuje pouze tzv. „link“ = identifikace v souboru/databázi.

Základní geometrické primitivy:

`CELL_HEADER_ELM`	**Hlavička buňky**
`LINE_ELM`	**Úsečka**
`LINE_STRING_ELM`	**Lomená čára**
`SHAPE_ELM`	**Polygon**
`TEXT_ELM`	**Text**
`TEXT_NODE`	**Textový uzel**
`CURVE_ELM`	**Křivka**
`CMPLX_STRING_ELM`	**Komplexní linie**
`CMPLX_SHAPE_ELM`	**Komplexní polygon**
`ELLIPSE_ELM`	**Elipsa**
`ARC_ELM`	**Oblouk**
`POINT_STRING_ELM`	**Body**
`BSPLINE_ELM`	**B-spline**
`DIMENSION_ELM`	**Kóta**

(komplexní línie se mohou skládat z různých segmentů – např. lomených čar a oblouků).

Definice obsahuje symbologii geometrických primitiv.

Typ `CELL` může opět obsahovat buňku.

Podobné vlastnosti mají i ostatní CAD formáty (DXF, DWG..)

ORACLE 7.x (Spatial Data Option)

Geometrie je reprezentována čtyřmi tabulkami:

_SDOLAYER	**- obsahuje služební údaje pro prostorovou indexaci**
_SDODIM	**- obsahuje rozsah pro jednotlivé dimenze geometrie**
_SDOGEOM	**- obsahuje vlastní geometrii**
_SDOINDEX	**- obsahuje prostorové indexy objektů v SDOGEOM**

možné typy geometrie jsou: bod, lomená čára a areál,

Jednalo se o první pokus o standardizaci geometrie – ten se vlivem denormalizace uložení souřadnic ukázal jako slepá ulička v současné době není rozvíjen.

ORACLE 8x, 9x – datový typ SDO_GEOMETRY dále rozlišitelný podle typu na:

- **UNKNOWN_GEOMETRY**	**- neznámá geometrie**
- **POINT**	**- bod**
- **LINESTRING**	**- lomená čára**
- **POLYGON**	**- areál (oblast)**
- **COLLECTION**	**- kolekce geometrií**
- **MULTIPOINT**	**- body**
- **MULTILINESTRING**	**- více linií**
- **MUTIPOLYGON**	**- více areálů**

Línie jsou tvořeny sekvencemi bodů a kruhových oblouků.

Typ `COLLECTION` **nemůže obsahovat typ** `COLLECTION`**.**

Definice neobsahuje symbologii geometrických primitiv.

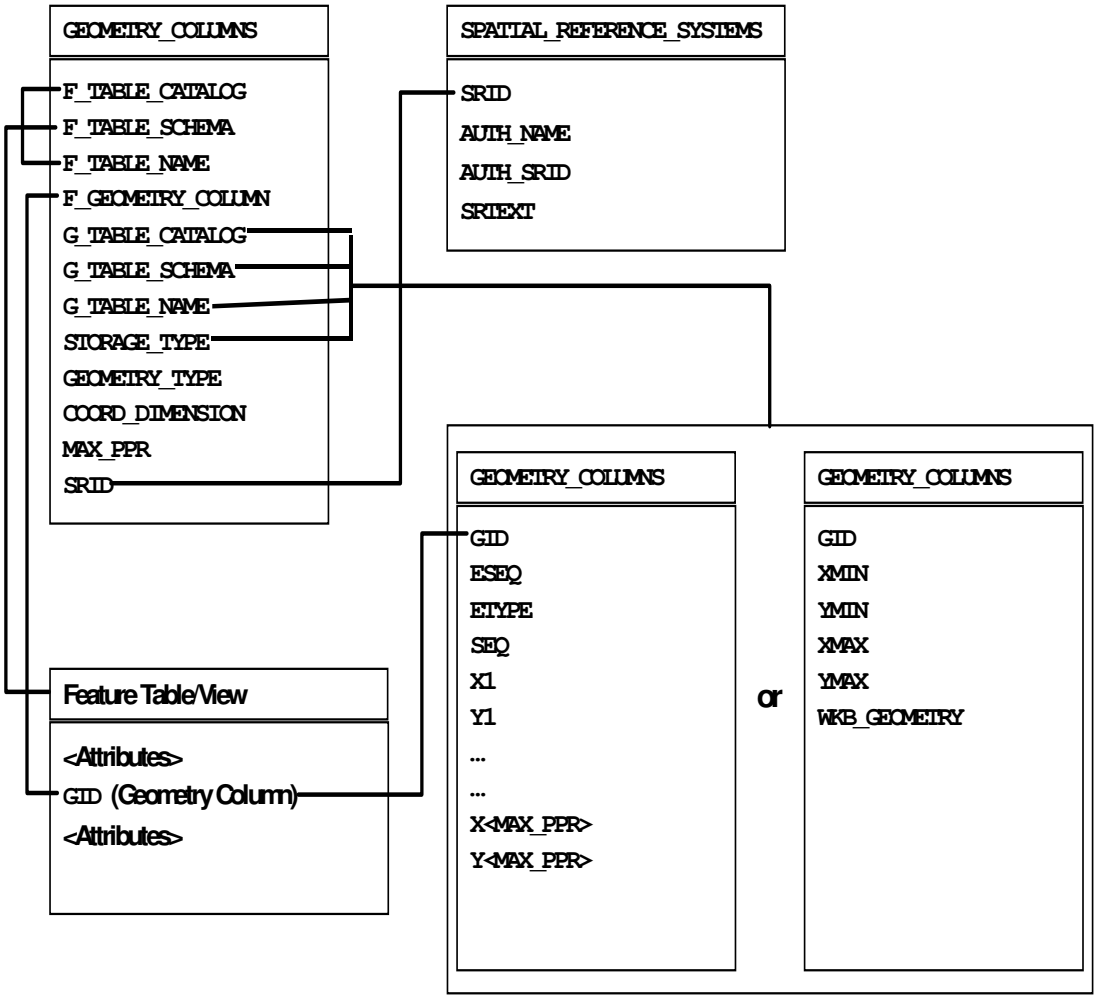
Pokus o standardizaci uložení prostorové složky:

Open GIS Consortium, Inc. – sdružení soukromých, veřejných organizací (universit ..) se zájmem vybudování „standardu“ struktur a služeb v prostorových datech.

Our Vision is a world in which everyone benefits from geographic information and services made available across any network, application, or platform.

Our Mission is to deliver spatial interface specifications that are openly available for global use.

OpenGIS® Simple Features Specification For SQL


GEOMETRY_COLUMNS
F_TABLE_CATALOG
F_TABLE_SCHEMA
F_TABLE_NAME
F_GEOMETRY_COLUMN
G_TABLE_CATALOG
G_TABLE_SCHEMA
G_TABLE_NAME
STORAGE_TYPE
GEOMETRY_TYPE
COORD_DIMENSION
MAX_PPR
SRID
SPATIAL_REFERENCE_SYSTEMS
SRID
AUTH_NAME
AUTH_SRID
SRTEXT
Feature Table/View
<Attributes>
GID (Geometry Column)
<Attributes>
GEOMETRY_COLUMNS
GID
ESEQ
ETYPE
SEQ
X1
Y1
...
...
X<MAX_PPR>
Y<MAX_PPR>
or
GEOMETRY_COLUMNS
GID
XMIN
YMIN
XMAX
YMAX
WKB_GEOMETRY

```
// Basic Type definitions
// byte : 1 byte
// uint32 : 32 bit unsigned integer (4 bytes)
// double : double precision number (8 bytes)

// Building Blocks : Point, LinearRing

Point {
 double x;
 double y;
};

LinearRing {
 uint32 numPoints;
 Point  points[numPoints];
}
enum wkbByteOrder {
 wkbXDR = 0,                          // Big Endian
 wkbNDR = 1                           // Little
Endian
};
```

```
WKBPoint {
      byte      byteOrder;
      uint32      wkbType;          // 1
      Point     point;
};

WKBLineString {
      byte      byteOrder;
      uint32      wkbType;          // 2
      uint32      numPoints;
      Point     points[numPoints];
};

WKBPolygon {
      byte      byteOrder;
      uint32      wkbType;          // 3
      uint32      numRings;
      LinearRing    rings[numRings];
};
```

```
WKBMultiPoint {
      byte      byteOrder;
      uint32      wkbType;              // 4
      uint32      num_wkbPoints;
      WKBPoint    WKBPoints[num_wkbPoints];
};
```

```
WKBMultiLineString {
 byte          byteOrder;
 uint32        wkbType;         // 5
 uint32        num_wkbLineStrings;
 WKBLineString WKBLineStrings[num_wkbLnStrgs];
};
```

```
wkbMultiPolygon {
 byte         byteOrder;
 uint32       wkbType;          // 6
 uint32       num_wkbPolygons;
 WKBPolygon   wkbPolygons[num_wkbPolygons];
}
```

```
WKBGeometry {
union {
 WKBPoint                point;
 WKBLineString           linestring;
 WKBPolygon              polygon;
 WKBGeometryCollection   collection;
 WKBMultiPoint           mpoint;
 WKBMultiLineString      mlinestring;
 WKBMultiPolygon         mpolygon;
      }
};

WKBGeometryCollection {
 Byte          byte_order;
 uint32        wkbType;                    // 7
 uint32        num_wkbGeometries;
 WKBGeometry   wkbGeometries[num_wkbGeoms];
}
```

Základní datové typy WKB neumožňují vykreslit mapu

- **symbologie geometrických elementů**
- **reprezentace bodových prvků**
- **texty (velikost, rotace, font …)**

Rekurzivní definice `WKBGeometry` je nutná a vyžaduje tento fakt zohlednit při vývoji aplikací!!

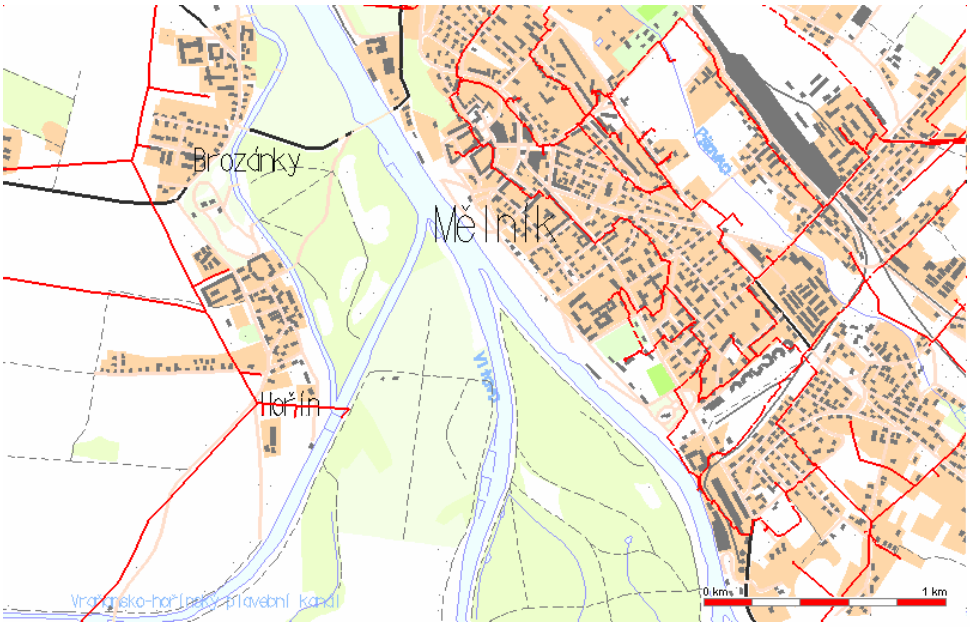
Příklad – rekurzivní zpracování geometrie

```
int processWKGB(byte *ge)
{
 int i,j,nP;
 int newPos,size;
 byte *pg;

 pg=(byte *)ge;

 …
 switch (getWKbType(ge)) // rozskok podle typu
  {
   case wkbPoint:
   …
   case wkbLineString:
    doSomethingWithLineString(pg);
    size=sizeofWKBLstr(pg);
    break; …

   case wkbGeometryCollection:
    newPos=sizeof(byte)+sizeof(uint32)*2;
    size=newPos;
    nP=pg->num_wkbGeometries;
    for (i=0;i<nP;++i)
     {
      pg=&pg[newPos];
      newPos=processWKGB(pg);
      size+=newPos;
     }
    break;
   default:
    error("Unsupported ..");
    break;
  }
 return(size);}
```

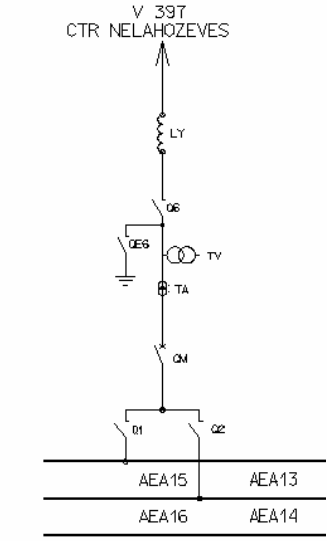
Norma WKB má i formu výměnného formátu v XML – GML – Gegraphic Markup Language. Ta zahrnuje definici geometrie ve formátu GML, popisnou část informace nijak neomezuje. Vzhledem k masivní podpoře XML parserů mnoha vývojových prostředí se zřejmě jedná „formát budoucnosti“.

Příklad GML:

```
<?xml version="1.0"?>
<GeometryCollection
xmlns:gml="http://www.opengis.net/gml">
 <PSVN_USK>
  <ID>10225914</ID>
  <L_PARAM>271527</L_PARAM>
  <gml:LineString srsName="null">
   <gml:coordinates cs="," decimal="."
    ts="">-595427397,-1075666207
          -595438694,-1075937499
   </gml:coordinates>
  </gml:LineString>
 </PSVN_USK>
 <PSVN_USK>
  <ID>10239989</ID>
  <L_PARAM>671864</L_PARAM>
  <gml:LineString srsName="null">
   <gml:coordinates cs="," decimal="." ts="">
    -594758645,-1075683985
    -595382726,-1075607457
    -595425487,-1075601997
   </gml:coordinates>
  </gml:LineString>
 </PSVN_USK>
.
.
```


Březánky
Mělník
Hořín
0 km
1 km


Střed
260367
Ludmila
260365
Nemocnice
260345
Poliklinika
260835
Vinařská šk.
260277
Sportovní II
Rousovice III.
260283
Tělocvična
260275
Rousovice II.
260350
Sportovní I.


V 397
CTR NELAHOZEVES
LY
QS
QES
TV
TA
QM
Q1
Q2
AEA15
AEA13
AEA16
AEA14

Dokumentační systémy správců sítí jsou často založeny na CAD prostředcích:

- **bohatší repertoár vyjadřovacích prostředků**
- **ověřené prostředky pro pořizování dat**
- **součástí geometrie je i její symbologie (grafická reprezentace**
-

Geometrické elementy v CAD systému (část normy IGDS – Bentley Systems, Intergraph)

IGDS	WKB
CELL_HEADER_ELM	WKBGeometryCollection
LINE_ELM	WKBLineString
LINE_STRING_ELM	WKBLineString
SHAPE_ELM	WKBPolygon
TEXT_ELM	WKBPoint
TEXT_NODE	WKBPoint
CURVE_ELM	WKBLineString
CMPLX_STRING_ELM	WKBLineString
CMPLX_SHAPE_ELM	WKBPolygon
ELLIPSE_ELM	WKBPolygon
ARC_ELM	WKBLineString
POINT_STRING_ELM	WKBMultiPoint
BSPLINE_ELM	WKBLineString
DIMENSION_ELM	WKBGeometryCollection
MULTILINE_ELM	WKBMultiLineString

Definice 1 - Problém vyhledání

Buď V konečná množina objektů typu T_1, q objekt typu T_2. Problém vyhledání je funkce *search(q,V)*, která vrací odpověď typu T_3. □

Příklad 2 - Problém příslušnosti prvku k množině

Položme $T_1 = T_2$, a $T_3 = \{T,F\}$. Vrací-li funkce *search(q,V)* hodnotu T v případě, že $q \in V$ a hodnotu F v případě $q \notin V$, potom říkáme, že funkce *search* řeší problém příslušnosti pro množinu V. □

Příklad 3 - Rozsahový dotaz na uspořádané množině

Nechť $(V,\leq)$ je úplně uspořádaná množina, $T_2 = T_1 \times T_1$, $T_3 = exp(T_1)$. Je-li $q = [low,high]$ a vrací-li funkce *search* takovou množinu $R \subseteq V$, že pro všechna $x \in R$ platí $low \leq x \leq high$, potom říkáme, že funkce *search* řeší problém rozsahového výběru na množině V.□

Příklad 4 - Rozsahový dotaz na body ve 2D prostoru

Nechť $V \subseteq E_2$ a $|V| < \infty$ (konečná množina bodů euklidovského 2D prostoru). Typem T_1 je tedy typ *„bod ve dvourozměrném prostoru“.* Buď dále $T_2 = T_1^2$ takový typ, že pro každé *x=[xmin,ymin,xmax,ymax]* typu T_2, je

$$xmin \leq xmax \text{ a } ymin \leq ymax.$$

(Typ dotazů jsou obdélníky (okna) rovnoběžné s osami souřadného systému). Typ odpovědí T_3 je opět množina takových bodů z *V,* které leží uvnitř dotazového obdélníku. Funkce *search(q,V)* vrací všechny prvky množiny *V*, které leží uvnitř obdélníku *q*, tedy je-li *q=[xmin,ymin,xmax,ymax]* potom se jedná o všechny body $b=[x,y] \in V$, pro které je:

$$xmin \leq x \leq xmax \text{ a } ymin \leq y \leq ymax$$

řeší problém rozsahového dotazu na body ve 2D prostoru. □

Příklad 5 - Rozsahový dotaz na obdélníky ve 2D prostoru

Buď *V* konečná množina obdélníků ve 2D prostoru takových, že jejich strany jsou rovnoběžné s osami souřadného systému. Typem T_1 je tedy typ „čtveřice souřadnic“ *[xmin,ymin,xmax,ymax]*. Nechť dále je $T_2 = T_1$. Typ dotazů jsou opět obdélníky (okna), které jsou rovnoběžné s osami souřadného systému Typ odpovědí T_3 je množina obdélníků z *V*, které incidují obdélníkem dotazu.Funkce *search(q,V),* která pro

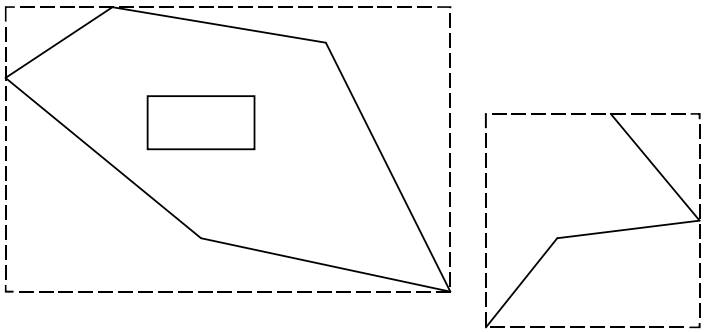
***q=[xminQ,yminQ,xmaxQ,ymaxQ]* vrací**

$[xmin,ymin,xmax,ymax] \in V$ **s vlastností**

$$xmin \leq xmaxQ \wedge ymin \leq ymaxQ \wedge xminQ \leq xmax \wedge yminQ \leq ymax$$

řeší problém rozsahového dotazu na obdélnících 2D prostoru. □

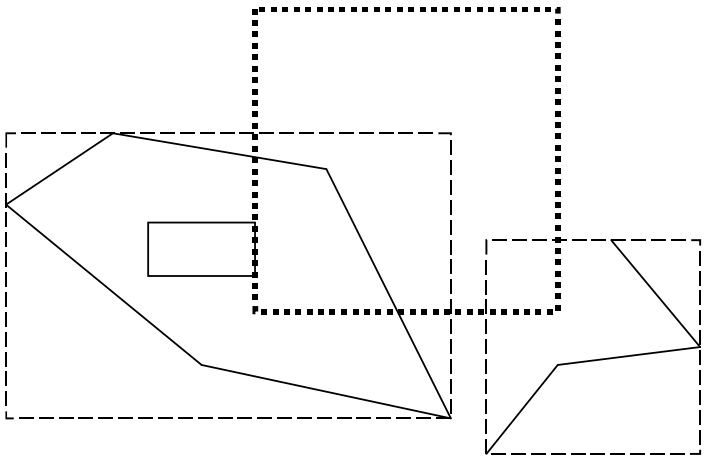
Jednotný zdroj pro indexování geometrických objektů je minimální omezující obdélník geometrického objektu rovnoběžný s osami souřadného systému – MBR (minimal bounding rectangle):



tedy minima, resp. maxima lomových (definičních) bodů

xmin,ymin,xmax,ymax

V naprosté většině případů vystačíme s obdélníkovým dotazem:



Metoda, která realizuje tento dotaz je často nazývána primárním filtrem (ORACLE). Metoda která realizuje přesnou odpověď je nazývána filtrem sekundárním.

Běžné indexovací metody (tj. ty které jsou implementovány v RDBMS – např. B^+ stromy) poskytují efektivní aparát pro vyhledávací problémy:

- **příslušnosti k množině**
- **rozsahový dotaz**

neposkytují samy o sobě aparát vhodný k prostorovým dotazům:

- **rozsahový dotaz na obdélníky ve 2D prostoru**

Příklad:

Máme soubor intervalů (1D obdélníků), a dotaz bude opět interval. Odpovědí budou všechny intervaly, které s dotazem incidují (mají neprázdný průnik)

Podmínka pro incidenci:

$$[xmin,xmax] \cap [xminQ,xmaxQ] \neq \varnothing^1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$xmin \leq xmaxQ \ \wedge xmax \geq xminQ$$

Indexovací metoda, která podporuje „první zásah“ nám nepomůže, neboť nejhorší případ dotazu vede prohledání celého souboru.

Problémy vyhledávání rozdělíme na dvě hlavní třídy:

- **problém statický**
- **problém dynamický**

Statický:

- ***build(V)*** **vybuduje podpůrné struktury pro množinu *V***
- ***search(q,V)*** **odpoví na vyhledávací dotaz**

Dynamický:

- ***insert(x,V)*** **vloží do množiny *V* nový objekt *x***
- ***delete(x,V)*** **vymaže z množiny *V* objekt *x***
- ***search(q,V)*** **odpoví na vyhledávací dotaz**

Statický problém lze řešit podobně jako dynamický problém opakovaným použitím funkce *insert*. □

Funkce *search* bývá většinou rozdělena na dvě části, a to

- ***init(q,V)*** **inicializace dotazu**
- ***fetch(x)*** **vrací jeden objekt z množiny *V***

práce potom probíhá podle jednoduchého schématu

```
init(q,V);
while(fetch(x)==SUCCESS)
 {
  zpracuj_objekt(x);
 }
```
□

Poznámka 1

Všechny uvedené příklady lze triviálně řešit jedním průchodem množiny *V,* tedy v lineární časové složitosti *O(|V|)*. Uvádění jiných metod má tedy smysl pouze v případě, že tento základní odhad nějak zlepšíme. □

Pro rozsahové výběry se většinou studuje časová složitost „zásahu“ prvního objektu, který splňuje podmínku rozsahového výběru.

Algoritmus 1 - Vyhledání klíče v binárním stromu

1. **Vstup: kořen stromu *nod,* klíč *k.***
2. **Je-li strom prázdný, potom končíme vyhledávání ”neúspěchem”.**
3. **Je-li *key(nod) = k,* potom končíme ”úspěchem”.**
4. **Je-li *k < key(nod),* pokračujeme krokem 1 pro *lSon(nod).***
5. **Je-li *k > key(nod),* pokračujeme krokem 1 pro *rSon(nod).***

Algoritmus 2 - Vkládání klíče do binárního stromu

1. **Vstup: klíč *k.***
2. **Procházíme strom, jako bychom hledali klíč *k*, dokud nenarazíme na volnou pozici, tedy končíme bodem 2 předešlého algoritmu.**
3. **Do volné pozice vložíme klíč *k.***

Algoritmus 3 - Rozsahové vyhledání v binárním stromu

1. **Vstup: interval *[min,max]*, kořen stromu *nod.***
2. **Patří-li *key(nod)* do intervalu [min,max], pošleme jej na výstup a aplikujeme algoritmus na *lSon(nod)* a *rSon(nod)*.**
3. **Je-li *max < key(nod),* aplikujeme algoritmus na *lSon(nod).***
4. **Je-li *min > key(nod),* aplikujeme algoritmus na *rSon(nod).***

Zlepšení časové složitosti spočívá v tom, že v určitých fázích algoritmů jsme schopni rozhodnout, kterou větev stromu můžeme bez rizika vynechat. Potíže způsobuje skutečnost, že v jistých případech může být strom degenerovaný (např. *lSon(nod)*=∅ pro všechny uzly *nod*). Degenerace nastává tehdy, když jednotlivé prvky vstupují do stromu v nevhodném pořadí. V případě statické verze vyhledávacích problémů lze vybudovat tzv. optimální binární strom (na vstupu procedury *build* známe celou množinu *V*).

Definice 2 - Optimální strom

Strom nazveme optimální, liší-li se počty uzlů v podstromech *lSon(nod)* a *rSon(nod)* maximálně o 1 pro jeho každý uzel *nod.* □

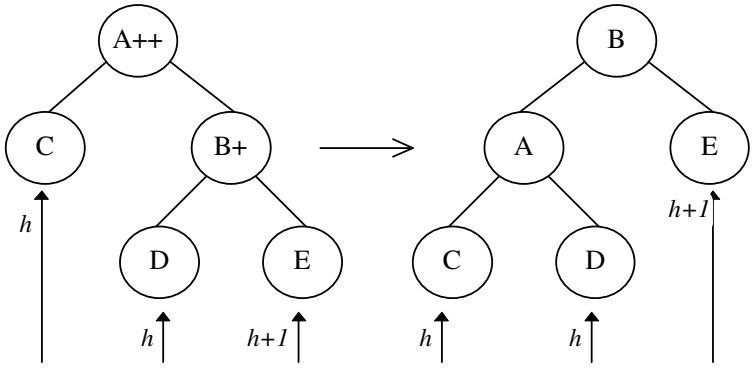
***Poznámka 2* – Hloubka optimálního stromu obsahujícího *|V|* klíčů je *log(|V|)*.**

Algoritmus 4 - Vybudování optimálního binárního stromu

1. **Vstup: množina klíčů *V,* kořen stromu *nod.***
2. **Je-li *V=∅,* skonči.**
3. **Rozděl množinu *V* na po dvou disjunktní množiny *V_1,{med(V)},V_2* tak, že *med(V)* je medián množiny *V*, klíče z *V_1* jsou menší než *med(V)* a klíče z *V_2* jsou větší než *med(V).***
4. **Definuj kořen stromu jako *med(V)*.**
5. **Aplikuj algoritmus na množinu *V_1* pro levý podstrom *lSon(nod)*.**
6. **Aplikuj algoritmus na množinu *V_2* pro pravý podstrom *rSon(nod).*□**

Definice 3 - Vyvážené stromy

Binární strom nazveme vyvážený, liší-li se hloubky *lSon(nod)* a *rSon(nod)* maximálně o 1 pro jeho každý uzel *nod* (hloubkou stromu rozumíme maximální délku cesty od kořene k listu). □



***Poznámka 3* – Hloubka vyváženého stromu obsahujícího *|V|* klíčů je *≈log(|V|)*.**

Definice 4 - BB[α] stromy

Buď *0 < α < 1/2.* Binární strom *T* patří do třídy *BB[α]* stromů, platí-li pro jeho každý uzel *nod,* podstrom *Tree(nod)* s kořenem *nod,* levý podstrom *lSon(nod)*

$$\alpha \leq |lSon(nod)|/|Tree(nod)| \leq 1-\alpha. \square$$

pokud byl v nějakém okamžiku podstrom definovaný uzlem *nod* optimální, pak k porušení podmínky z definice *BB[α]* stromů musí dojít k minimálně *c.|Tree(nod)|* vložení/mazání uzlů do/z příslušného podstromu (*c* je konstanta závislá pouze na parametru α).

Definice 5 – B^+-stromy

B-strom řádu *m* je strom s těmito vlastnostmi:

- **každý uzel má ≤ *m* synů**
- **každý uzel, s výjimkou kořene a listů, má ≥ *m/2* synů**
- **kořen má minimálně 2 syny, pokud není list**
- **všechny listy jsou na stejné úrovni**
- **nelistový uzel s *k* syny obsahuje *k - 1* klíčů □**

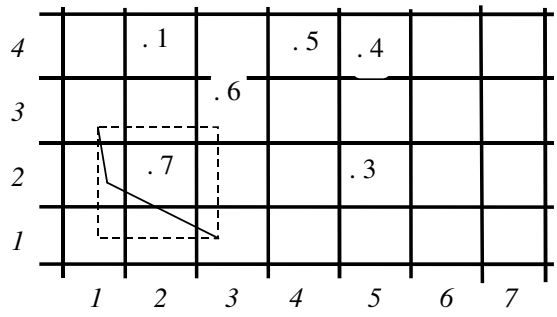
Hlavní myšlenka spočívá ve tvaru uzlů:

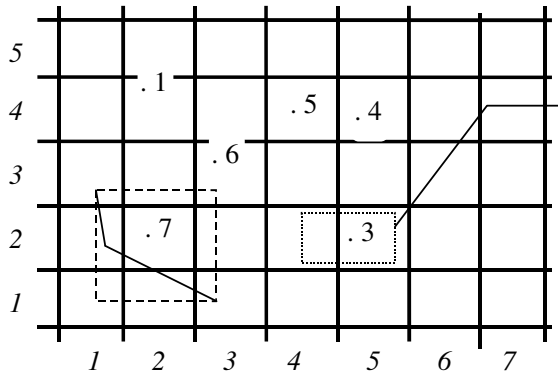
$$p_0\ key_1\ p_1\ .\ .\ .\ p_{k-1}\ key_k\ p_k$$

kde p_i je ukazatel na uzel pro s všechny klíči *key* s vlastností:

$$key_{i-1} \leq key \leq key_i$$

Metoda „GRID“





Prostorový dotaz v GRIDu, prohledáváme pouze čtverce (4,2) a (5,2), pro efektivní přístup ke čtvercům použijeme libovolnou vyhledávací metodu (strukturu).

Realizace GRID metody v prostředí SQL

```
create table GTABLE
 (
  GID  number,
  XMIN number,
  YMIN number,
  XMAX number,
  YMAX number,
  WKB_GEOMETRY blob,
  .
  .
  constraint GTABLE_PK primary KEY (GID)
 );

create table GTABLE_IDX
 (
  GID    number,
  GRID_X number,
  GRID_Y number
  );

alter table GTABLE_IDX add constraint
 GTABLE_IDX_PK primary key (gid,grid_x,grid_y);

alter table GTABLE_IDX add constraint
 GTABLE_IDX_fk1
  foreign key (GID) references GTABLE(GID)
  ON DELETE CASCADE;

create index GTABLE_IDX_I1
    on GTABLE_IDX(grid_x, grid_y);
```

```
create trigger gtable_spatial
before insert or update of x,y on GTABLE for
each row
begin
 xfrom:=GET_GRID_X(:NEW.XMIN);
 xto  :=GET_GRID_X(:NEW.XMAX);
 yfrom:=GET_GRID_Y(:NEW.YMIN);
 yto  :=GET_GRID_Y(:NEW.YMAX);

 pro xfrom<=i<=xto a yfrom<=j<=yto
 begin
  INSERT INTO GTABLE_IDX VALUES(:NEW.GID,i,j);
 end;

end;
/
```

(funkce `GET_GRID_X/Y` vrací gridové indexy)

```
Create table SPATIAL_QUERY
  (
   id int,
   xmin int,
   ymin int,
   xmax int,
   ymax int,
   constraint SPATIAL_QUERY_PK
    primary key (id)
  );
```

```
  CREATE TABLE SPATIAL_QUERY_IDX
   (
    query_id int,
    grid_x int,
    grid_y int,
    constraint SPATIAL_QUERY_IDX_PK
     primary key (query_id,grid_x, grid_y),
    constraint SPATIAL_QUERY_IDX_FK
     foreign key query_id references
     SPATIAL_QUERY(ID)
     on delete cascade
   );

create trigger SPATIAL_QUERY_SPATIAL
before insert of id on SPATIAL_QUERY
for each row
xfrom,xto,yfrom,yto,i,j int;
BEGIN
 xfrom:=GET_GRID_X(:NEW.XMIN);
 xto:=GET_GRID_X(:NEW.XMAX);
 yfrom:=GET_GRID_Y(:NEW.YMIN);
 yto:=GET_GRID_Y(:NEW.YMAX);

 pro xfrom<=i<=xto a yfrom<=j<=yto
  BEGIN
   INSERT INTO SPATIAL_QUERY_IDX
    VALUES (:NEW.ID,i,j);
  END;

END;
/
```

Prostorový dotaz pro obdélník `xmin,ymin,xmax,ymax` provedeme následovně:

1) **Identifikace dotazu:**
   Z databáze získáme nový (jednoznačný) klíč dotazu, například ze sekvence `select query.nextval from query_sequence.`

2) **Inicializace dotazu:**
   `insert into spatial_query`
   `values (`***`id,xmin,ymin,xmax,ymax`***`)`,
   tím se vlivem triggeru `SPATIAL_QUERY_SPATIAL` **automaticky vloží identifikace gridových čtverců to tabulky** `spatial_query_idx`

3) **Prostorový dotaz:**

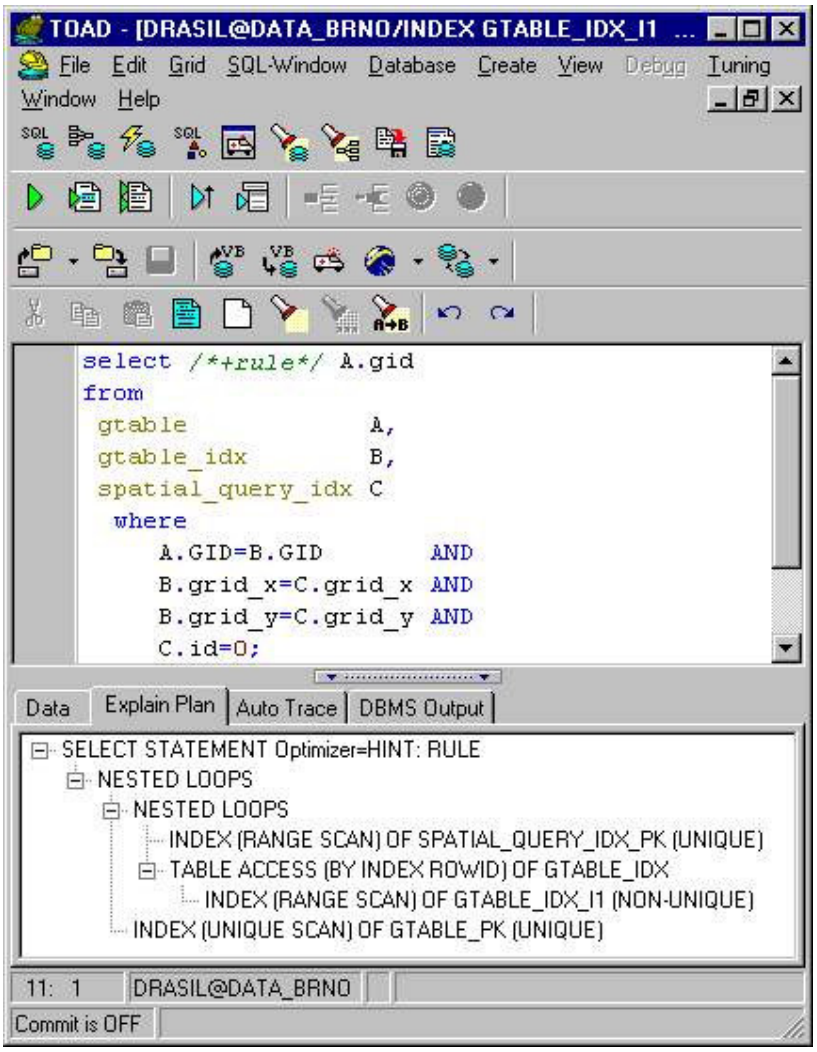
```
select …
from
 gtable            A,
 gtable_idx        B,
 spatial_query_idx C
where
 A.GID=B.GID       AND
 B.grid_x=C.grid_x AND
 B.grid_y=C.grid_y AND
 C.query_id=id;
```

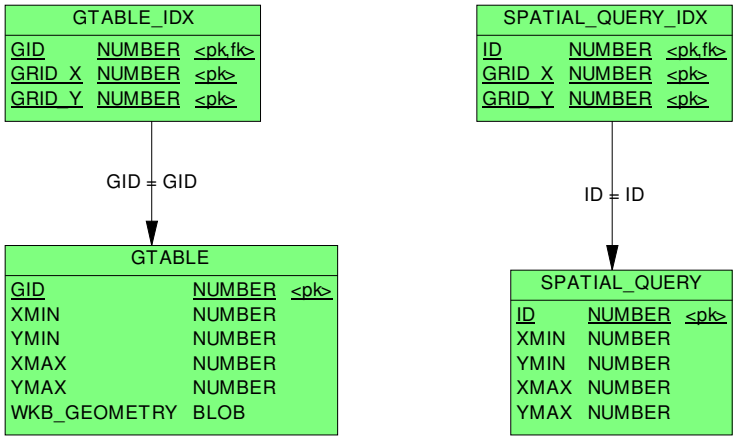
4) **Ukončení prostorového dotazu:**

```
delete from spatial_query where id=id;
```

Jaký mechanismus odstraňuje řádky z tabulky `spatial_query_idx`?

Exekuční plán prostorového dotazu GRID





Výhody vs. nevýhody GRID metody.

+

- **velmi snadná implementace v prostředí RDBMS**
- **snadné rozšíření na více dimenzí (?)**
- **relativně snadná (resp. řešitelná implementace neobdélníkových dotazů)**

-

- **netriviální odhad velikosti GRIDových čtverců, špatná volba má dramatické důsledky**
- **nepravidelné chování při řádově rozdílné velikosti geometrických objektů**

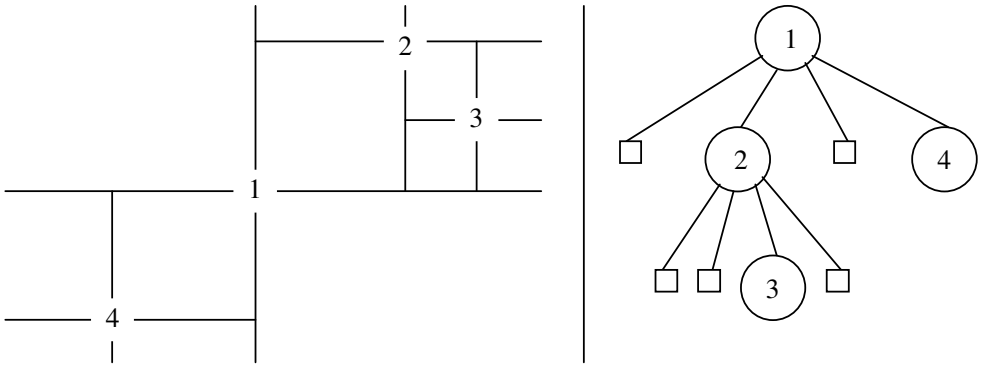
Quad Tree – kvartérní strom

- *urSon(nod)* - klíče tohoto podstromu jsou „vpravo nahoře“ od bodu *key(nod)*

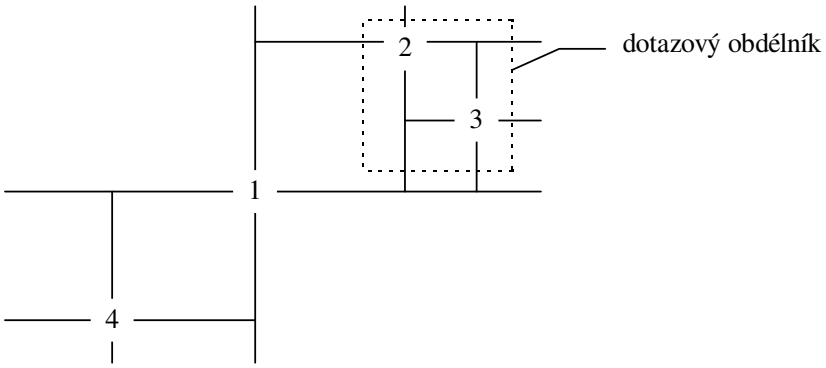
- *ulSon(nod)* - klíče tohoto podstromu jsou „vlevo nahoře“ od bodu *key(nod)*

- *lrSon(nod)* - klíče tohoto podstromu jsou „vpravo dole“ od bodu *key(nod)*

- *llSon(nod)* - klíče tohoto podstromu jsou „vlevo dole“ od bodu *key(nod)*



Obr. 8 - Quad Tree - Kvartérní strom



Obr. 9 - Rozsahový dotaz v Quad-Tree pro body. Podstrom „4“ neprohledáváme.

Algoritmus – Vkládání do Quad-Tree

Vkládání je stejné, jako v případě obyčejných binárních stromů. Hledáme tedy bod v kvartérním stromu, dokud nenajdeme volnou pozici. Do ní vložíme nový klíč.

Algoritmus - Rozsahový dotaz v Quad-Tree pro body

1. **Vstup: kořen stromu *nod* a obdélník *q=[xmin,ymin,xmax,ymax].***

2. Je-li *Tree(nod)=∅,* skonči.¨

3. Je-li *key(nod)* v dotazovém obdélníku *q,* pošli jej na výstup a aplikuj algoritmus na všechny jeho čtyři podstromy.

4. Vyber podstromy, pro které budeš aplikovat algoritmus (*x( )* značí x-ovou souřadnici klíče):

- **je-li *x(key(nod)) > xmax* ∧ *y(key(nod)) > ymax,* potom aplikuj algoritmus na větev *llSon(nod),***
- **je-li *x(key(nod)) > xmax,* potom aplikuj algoritmus pouze na větev *llSon(nod)* a *ulSon(nod),***
- **a analogicky pro ostatní případy.**

Definice 6 - k-D strom

Úrovní *level(nod)* uzlu *nod* binárního stromu rozumíme délku cesty k tomuto uzlu od kořene stromu.

Buď $(S,\leq)$ **uspořádaná množina,**

$k > 0$,

$x=(x_0,..,x_i,..,x_{k-1}),\ y=(y_0,..,y_i,..,y_{k-1}) \in S^k$

Říkáme, že

$$x \leq_i y, \quad \text{jestliže} \quad x_i \leq y_i$$

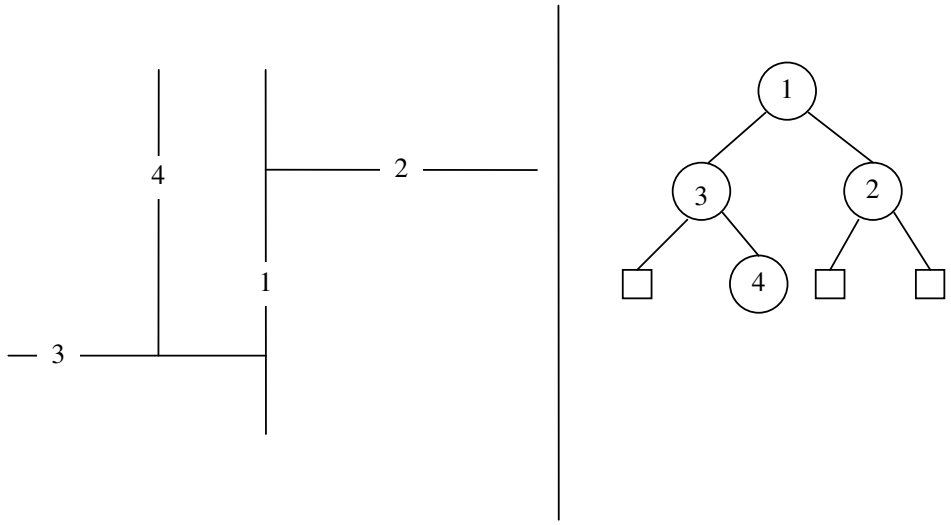
k-D stromem nad *S* nazveme binární strom, jehož uzly jsou k-tice z S^k, a kde pro každý uzel *nod,* jeho levý podstrom *lSon(nod)* a všechny uzly tohoto podstromu *nodL* platí:

$$nodl \leq_i nod \quad \text{kde } i = level(nod) \bmod k$$

Analogická podmínka musí být splněna i pro pravý podstrom *rSon(nod).* □

Algoritmus – Vložení bodu do 2-d stromu

Analogicky binárním stromům, hledáme ve stromu „bod“ dokud nenarazíme na volnou pozici.



Obr. 10 - 2-d strom

<u>Algoritmus - Rozsahový dotaz pro body ve 2-d stromu</u>

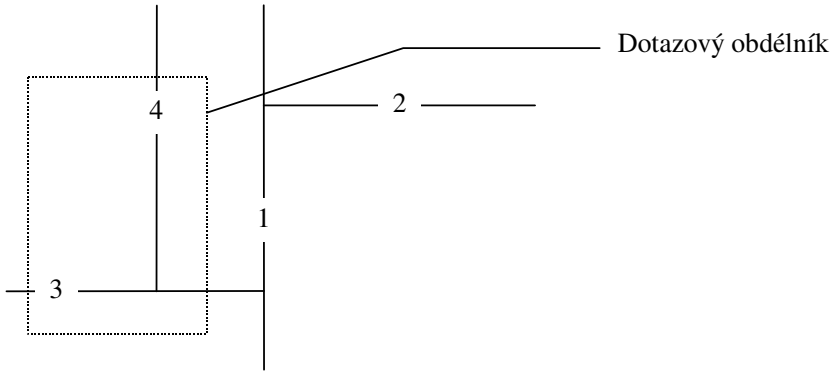
Tree(nod)* označuje podstrom z uzlu *nod

key(nod)* označuje bod v uzlu *nod

x( ) značí *x-ovou* souřadnici klíče bodu

1.*Vstup: Kořen *nod* a obdélník *q=[xmin,ymin,xmax,ymax].
2. Je-li *Tree(nod)=∅,* skonči.
3. Je-li *key(nod)* v dotazovém obdélníku, pošli jej na výstup a aplikuj algoritmus na oba dva syny.
4. Vyber syny, pro které budeš aplikovat algoritmus a to podle úrovně ve které se nachází uzel *nod*:

- **je-li *level(nod) mod 2=0* $\wedge$ *x(key(nod)) > xmax,* potom aplikuj algoritmus na větev *lSon(nod)*,**
- **analogicky pro další možné případy.**



Obr. 11 - Rozsahový dotaz v 2-d-stromu pro body. Podstrom „2“ neprohledáváme.

Vyvažování multidimensionálních stromů je komplikované. Nedají se totiž provádět rotace jako v klasických binárních stromech (srovnej s *obr. 5*), protože v každém patře stromu měníme srovnávací kritérium.

Pomocí *BB[α]* techniky lze však *k-D* stromy udržovat vyvážené pomocí částečné reorganizace. K tomu potřebujeme techniku pro budování optimálního 2-D stromu.

<u>Algoritmus -Vybudování optimálního 2-D stromu</u>

1. **Vstup: množina bodů *V,* kořen stromu *nod* a *l* $\in$ {*x,y*}**
2. **Je-li *V=*$\varnothing$*,* skonči.**
3. **Rozděl množinu *V* na po dvou disjunktní množiny V_1,{$med_l(V)$},V_2 tak, že $med_l(V)$ je takový bod, že jeho *x*-ová souřadnice je medián množiny *l*-ových souřadnic z *V*, *l*-ové souřadnice z V_1 jsou menší než $med_l(V)$ a *l*-ové z V_2 jsou větší než $med_l(V)$.**
4. **Definuj kořen stromu jako $med_l(V)$.**
5. **Je-li *l* rovno *x* potom přiřaď *l=y* jinak *l=x***
6. **Aplikuj algoritmus na množinu V_1 pro levý podstrom *lSon(nod)*.**
7. **Aplikuj algoritmus na množinu V_2 pro pravý podstrom *rSon(nod).*□**

Metodu k-D stromů lze použít i na obdélníky, které můžeme považovat za 4D body. Použijeme tedy 4-D strom.

<u>Algoritmus 7 - Rozsahový výběr pro obdélníky ve 4-d stromu</u>

1. **Vstup: kořen stromu *nod,* dotazový obdélník *q=[xmin,ymin,xmax,ymax].***
2. **Je-li *Tree(nod)=∅*, skonči.**
3. **Jsou-li obdélníky *q* a *key(nod)* incidentní, pošli *id(nod)* na výstup a aplikuj algoritmus na *lSon(nod)* a *rSon(nod).***
4. **Podle úrovně, ve které se nacházíš ve stromu, se rozhodni, zda můžeš vynechat nějakou větev, např.:**

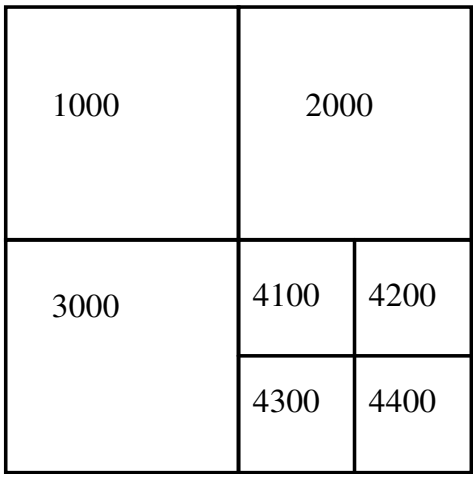
   Je-li *level(nod) mod 4 = 0* a *xmin(nod(key)) > xmax(q)*

   aplikuj algoritmus pouze pro *lSon(nod).*

Analogicky pro další úrovně, v každé se dá za jistých podmínek jedna větev vynechat.

Pevný kvartérní strom (*non-pointer Quad Tree)*

Zájmové území je postupně děleno na obdélníkové části a podle nich je jim přidělován „klíč“



Obr. 12 - Číslování obdélníků-dlaždic v non-pointer Quad Tree.

Obdélník bude mít index takové dlaždice „pevné struktury“ která je jeho nadmnožinou a je nejmenší s touto vlastností.

- **Pro libovolný obdélník *R* označme *Q(R)* jeho klíč v non-pointer QuadTree.**
- **Pro libovolný klíč *K* označme jeho „nenulovou“ část, tedy levý podřetězec symbolem *NZ(K)*.**
- **Délku znakového řetězce *K* označme *strlen(K)*.**
- **Podřetězec řetězce *K* z levé strany délky *l* označme *lsubstr(K,l).***

Tvrzení

Buďte *A, B* libovolné obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami souřadného systému. Nechť dále $A \cap B \neq \varnothing$. Označíme-li *l=min{strlen(NZ(Q(A))),strlen(NZ(Q(B)))}*, potom:

$$lsubstr(Q(A),l)=lsubstr(Q(B),l)$$

□.

Algoritmus - Vyhledání obdélníků v non-pointer QuadTree

1. Vstup – obdélník *S=[xmin,ymin,xmax,ymax]*.

2. Pošli na výstup všechny obdélníky *A*, pro které:

$$lsubstr(Q(A),strlen(NZ(Q(S))))= NZ(Q(S)) \wedge A \cap S \neq \varnothing$$

3. Pošli na výstup všechny obdélníky *A*, pro které:

$$Q(A)=P \wedge A \cap S \neq \varnothing$$

kde *P* jsou všechny klíče, které jsou na cestě od *Q(S)* ke kořenu, tj. v *Q(S)* zprava postupně nahrazujeme nenulové číslice nulami.

Tento postup má jednu nevýhodu, v případě, že dotaz inciduje se středem území, potom procházíme v bodě 2 všechno. Této nevýhodě se vyhneme dekomponování dotazu.

Algoritmus Dekompozice dotazu v non-pointer QuadTree

1. **Vstup – dotazový obdélník *S*.**

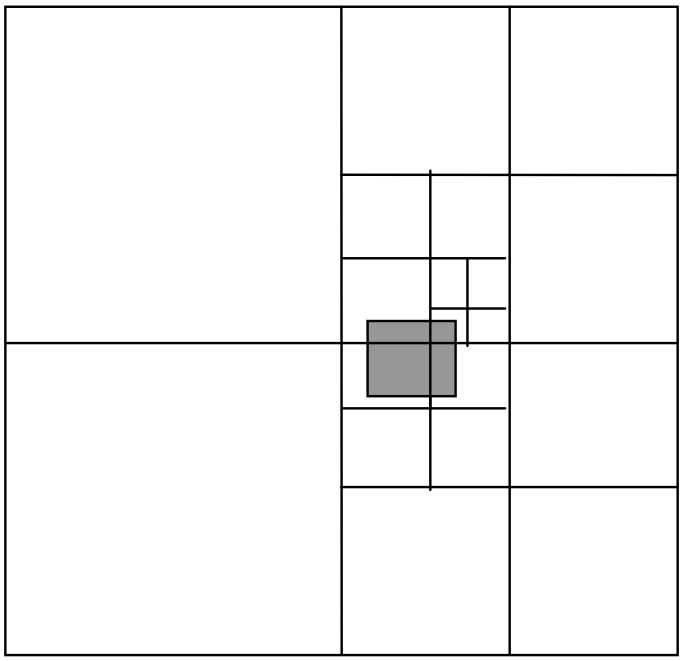
2. **Rozděl obdélník *S* na obdélníky S_1 a S_2 ($S_1 \cup S_2 = S$) podle takové souřadnice *x* resp. *y*, která způsobila klíčování v *non-pointer quadTree,* tj. takovou, která ohraničuje nějaký čtverec v *non-pointer quadTree* a prochází dotazovým obdélníkem *S*. V případě, že taková souřadnice neexistuje potom obdélník *S* neděl a konec.**

3. **Aplikuj krok 2. na čtverce S_1 a S_2 podle druhé souřadnice.**

Následuje příklad, na kterém demonstrujeme hlavní výhody této metody:

- **Velmi snadná implementace v prostředí SQL - tedy relačních databází**

- **„jeden objekt“´=„jeden klíč“, znamená, že prostorová indexace je zabezpečena přímo v geometrické tabulce. Prostorový výběr nevyžaduje součin, či spojení s dalšími tabulkami.**



Dekompozice dotazu – 4 obdélníky s klíči:

2330000000,2343000000,4110000000,4120000000

```
SELECT  ID FROM KM_ALL WHERE
(
 (SPAT_KEY BETWEEN '2330000000' AND '2335000000')  OR
 (SPAT_KEY BETWEEN '2343000000' AND '2343500000')  OR
 (SPAT_KEY BETWEEN '4110000000' AND '4115000000')  OR
 (SPAT_KEY BETWEEN '4120000000' AND '4125000000')
) OR
SPAT_KEY IN
('0000000000',
 '2000000000',
 '2300000000',
 '2340000000',
 '4000000000',
 '4100000000'
 )
 AND (xmax>=-642646042) AND (ymax>=-1114990337) AND
     (xmin<=-569087654) AND (ymin<=-1070777051)
```

Intervalové stromy

Za zaměstnance podniku máme data v tabulce:

Identifikace	Počátek_prac_poměru	Konec_prac_poměru

a potřebujeme řešit dotazy typu "kdo všechno byl zaměstnán v daném období ?". □

Definice 7 - Intervalový strom

Intervalový strom pro množinu $V=\{[x_1, x_2],..., [x_{2n-1}, x_{2n}]\}$ **je tvořen:**

- **binárním vyhledávacím stromem pro** $2n$ **počátečních a koncových bodů**
- **každý uzel** *nod* **(definovaný bodem** $x(nod)$**) navíc obsahuje seznam intervalů** $I(nod) \subseteq V$ **takový, že** $x(nod)$ **je bodem každého intervalu** $I(nod)$
- **levý (pravý) podstrom uzlu** *nod* **je intervalový strom pro intervaly, jejichž pravé (levé) koncové body jsou menší (větší) než** $x(nod)$

□

Již z definice intervalového stromu je zřejmé, že je nutné jej budovat postupně.

Algoritmus 9 - Budování intervalového stromu

1. **Vstup: množina intervalů** V.
2. **Vybuduj binární strom** T **pro počáteční a koncové body z** V.
3. **Zařazujeme postupně všechny intervaly co nejvýše do stromu** T.

Poznámka 6

Každý uzel *nod* dělí množinu *V* do tří skupin. Jednak jsou to intervaly ležící vlevo od *x(nod)*, jednak intervaly ležící vpravo od *x(nod)* a konečně intervaly které bod *x(nod)* obsahují.□

Algoritmus - Vyhledání intervalů v intervalovém stromu

1. **Vstup: interval dotazu *q=[xminQ,xmaxQ],* kořen stromu *nod***

2. **Je-li *nod* list, potom skonči.**

3. **Je-li *x(nod)* v intervalu *q,* potom**
   - **3.1. *I(nod)* na výstup**
   - **3.2. Aplikuj algoritmus pro *lSon(nod)* a *rSon(nod)***

4. **Je-li *maxQ < x(nod)* potom:**
   - **4.1. Projdi seznam *I(nod)* a na výstup pošli ty intervaly z *I(nod)*, které incidují s *q.***
   - **4.2. Aplikuj algoritmus na *lSon(nod)***

5. **Je-li *minQ > x(nod)* potom:**
   - **5.1. Projdi seznam *I(nod)* a na výstup pošli ty intervaly z *I(nod)*, které incidují s *q.***
   - **5.2. Aplikuj algoritmus na *rSon(nod).***

Poznámka 7

Seznam *I(nod)* lze reprezentovat dvěma provázanými seznamy *L(nod)* a *R(nod)*, ve kterých jsou levé a pravé koncové body. *L(nod)* je uspořádán vzestupně, *R(nod)* je uspořádán sestupně. Toho lze využít v krocích 4.1. a 5.1. tak, že procházení seznamu lze ukončit prvním neúspěchem.□

Intervalové stromy pro obdélníky

Pro jednu osu (třeba *x)* vybudujeme intervalový strom s tím rozdílem, že seznamy *I(nod)* budou 2D intervaly, tedy obdélníky. Tím dostaneme primární strukturu pro 2D variantu intervalového stromu.

Sekundární struktura bude tvořena intervalovými stromy pro druhou (*y*-ovou) osu v každém uzlu *nod* primárního intervalového stromu pro *y*-ové intervaly ze seznamu *I(nod).*

Rozsahový výběr v takto vybudované struktuře potom probíhá stejně, jako v 1D variantě s následujícím rozdílem:

- **3.1. Použije se sekundární struktura pro výběr podle *y* – interval**
- **4.1. Zohlední se *y* - intervaly při posílání na výstup¨**
- **5.1. Zohlední se *y* - intervaly při posílání na výstup**

SB^+ stromy

Jsou modifikací B^+ stromů

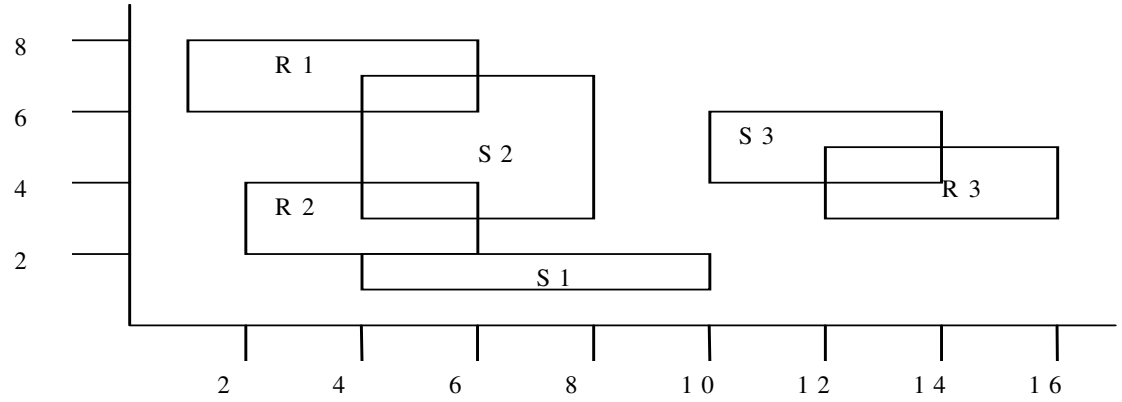
SB^+ strom je B^+ strom z počátečních a koncových bodů intervalů a navíc:

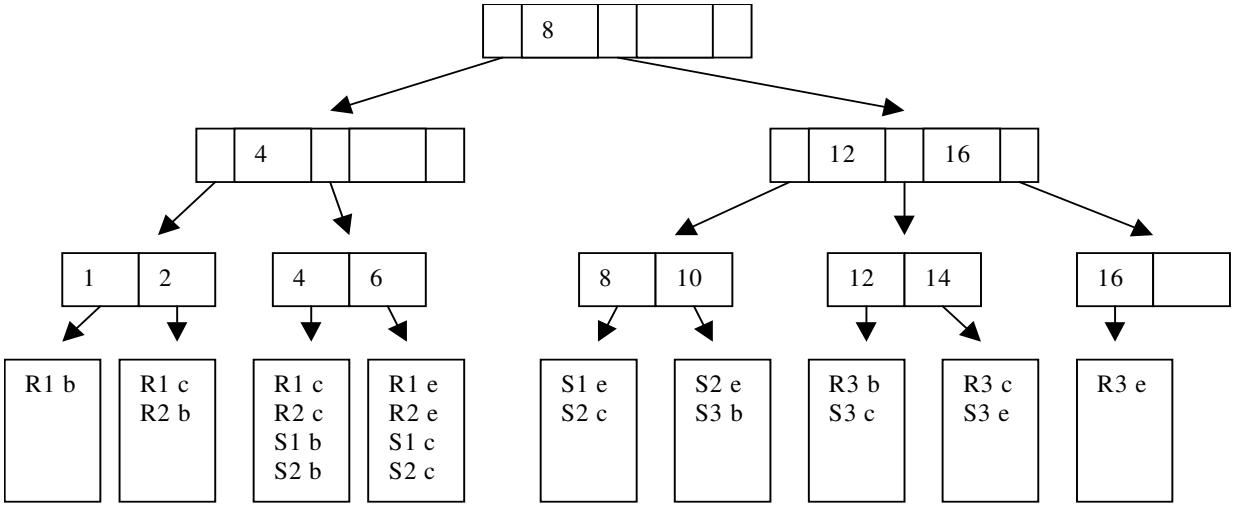
- **V SB^+ stromech jsou k listům přidány seznamy identifikátorů intervalů, které jsou incidentní s klíčem v listu (tj. nějakým počátkem resp. koncem nějakého intervalu).**
- **S každým identifikátorem je pamatován příznak, který označuje zda v se jedná o počáteční hodnotu intervalu, koncovou hodnotu intervalu, popřípadě zda interval touto hodnotou prochází.**

Listy SB^+ stromech jsou tedy tvořeny strukturami, které můžeme popsat následujícím způsobem:

```
typedef struct     // seznam intervalů
 {
  long idInterval; // identifikace intervalu
  char incidType;  // 'b'-počátek,
 }                 // 'c'průchozí, 'e' konec
  sbListT;


  typedef struct       // list SB+ stromu
   {
    long point;        // hodnota bodu
    sbListT list[1];   // seznam incid.intervalů
   }
  sbLeafT;
```

SB+ strom


8
6
4
2
R 1
S 2
S 3
R 2
R 3
S 1
2
4
6
8
1 0
1 2
1 4
1 6


8
4
12
16
1
2
4
6
8
10
12
14
16
R1 b
R1 c
R2 b
R1 c
R2 c
S1 b
S2 b
R1 e
R2 e
S1 c
S2 c
S1 e
S2 c
S2 e
S3 b
R3 b
S3 c
R3 c
S3 e
R3 e

Algoritmus – Incidence intervalů v SB^+ stromech

1. **Vstup dotazový interval *[xmin,xmax]*. Existující SB^+ strom *S*.**

2. **Najdi ve stromu takový list, že pro bod *ip* který reprezentuje tento list platí**

$$ip=min\{i;\ i \in S,\ \ i \geq xmin\}$$

3. **Pro $ip \leq i \leq xmax$ pošli na výstup identifikace intervalů ze seznamu listu reprezentovaným bodem *i* (identifikace se mohou opakovat, posíláme jen jednou).**

Algoritmus – Vkládání intervalů do SB^+ stromu

1. **Vstupní interval *[xmin,xmax]*, jeho identifikace *I*.**
2. **Najdi ve stromu takový list, že pro bod *ip* který reprezentuje tento list platí *ip=xmin*.**
3. **Jestliže v kroku 2. jsme takový list nenašli, potom:**
   - **3.1. Vlož do stromu bod *xmin* standardní metodou pro B^+ stromy**
   - **3.2. Nechť *pip* je bezprostřední předchůdce *xmin*, *nip* bezprostřední následník *xmin* v SB^+ stromu.**
   - **3.3. Polož *xmin.seznam* = *pip.seznam* ∩ *nip.seznam* bez ohledu na příznak typu incidence.**
   - **3.4. Polož příznak typu incidence =’c’ pro všechny intervaly z *xmin.seznam*.**
4. **Kroky 2.-3. pro *xmax*.**
5. **Pro všechny listy SB^+ stromu takové, že pro jejich body *ip* platí $xmin \leq ip \leq xmax$:**
   - **5.1. Je-li *ip=xmin* potom přidej do *ip.seznam* identifikaci *I* a příznak typu incidence ‘b’.**
   - **5.2. Je-li *ip=xmax* potom přidej do *ip.seznam* identifikaci *I* a příznak typu incidence ‘e’.**
   - **5.3. Je-li *xmin<ip<xmax* potom přidej do *ip.seznam* identifikaci *I* a příznak typu incidence ‘c’.**

Poznámka

Vícerozměrný problém řešíme vybudováním indexových struktur pro každou osu. Pro vícerozměrný výběr potom musíme vytvořit výstup jako průnik výstupů pro každou osu.

Poznámka

Strukturu SB$^+$ stromu můžeme velmi efektivně použít na řešení incidence objektů v dotazovém okně, tedy na dotaz typu: *Všechny dvojice objektů, které mohou mít neprázdný průnik a leží v daném dotazovém okně.* Takový dotaz řešíme snadnou modifikací algoritmu v kroku 3..

Poznámka

Metoda SB$^+$ stromu je okamžitě použitelná v relačních databázích indexovými tabulkami typu:

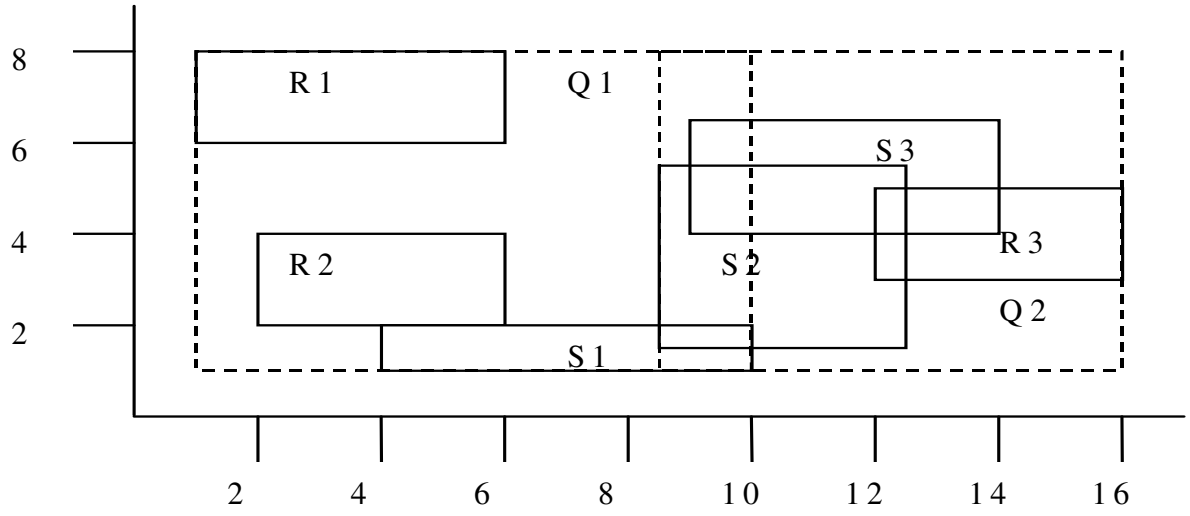
```
create table table_idx
(
 idInterval int,
 point      int,
 incidence  varchar(1)
);
```

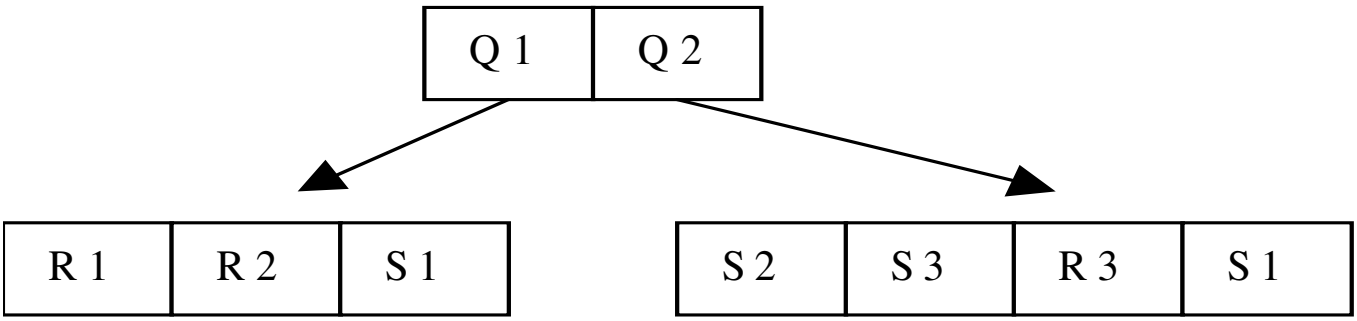
R-Stromy (R-tree)

Analogie k B-stromům

***M* – maximální počet klíčů v uzlu, *m* ≤ *M/2* – minimální počet uzlů.**

- **Každý uzel obsahuje minimálně *m* klíčů a maximálně M klíčů pokud není kořen.**
- **Klíče v R-stromech jsou obdélníky s ukazateli na synovské uzly, v listech obdélníky s ukazateli na geometrické prvky.**
- **Pro synovské uzly platí, že jejich klíče (tj. obdélníky) jsou uvnitř "otcovského" obdélníku.**
- **Listy stromu jsou na téže úrovni.**
- **Kořen obsahuje minimálně dva klíče, pokud není list.**




Q 1
Q 2
R 1
R 2
S 1
S 2
S 3
R 3
S 1

Algoritmus – Vyhledání klíčů obdélníků v R- stromech

1. **Vstup *uzel* R-stromu *R*. Dotazový obdélník *Q*.**
2. **Je-li *uzel* list, potom všechny klíče incidentní s *Q* na výstup.**
3. **Jinak aplikuj algoritmus na syny takových *klíčů* z *uzel*, pro které je *klíč* incidentní s *Q*.**

Algoritmus – Vkládání klíčů do R- stromů

1. **Vstup, klíč *Key=(MBR,ID)***
2. **Vyhledej list N.**
   - **1.1 Polož N:=kořen stromu.**
   - **1.2 Je-li N list návrat.**
   - **1.3 Nechť klíč F v N jehož obdélník vyžaduje nejmenší rozšíření takové, aby obsahoval MBR vstupujícího klíče. Rozšiř jeho MBR a pokračuj 1.4.**
   - **1.4 N:=synovský uzel na který ukazuje F, a pokračuj krokem 1.2**
3. **Přidej *Key* do vybraného uzlu N.**
4. **Je-li počet klíčů v N menší, nebo roven M konec, jinak rozděl uzel N na dva nové uzly. Je-li N kořen, vytvoř nový kořen se dvěma novými klíči, jinak odstraň z rodičovského uzlu původní klíč a nahraď jej dvěma novými klíči a polož N:= rodič N.**
5. **Opakuj 4.**

Najdi dva obdélníky (možná incidentní) s následujícími vlastnostmi:

- **Sjednocení obou obdélníků je původní obdélník**
- **Oba obdélníky obsahují zhruba stejný počet klíčů**
- **Oba obdélníky se překrývají co nejméně**

<u>Algoritmus dělení uzlu (kvadratická složitost)</u>

1. **Vyber první dva obdélníky**

   1.1 Pro každou dvojici klíčů *k,l* vytvoř minimální obdélník j obsahující oba klíče a polož *p(k,l)=Plocha(j)-Plocha(k)-Plocha(l).*

   1.2 Vyber dvojici obdélníků *k,l* s maximem *p(k,l)*, zařaď je do první a druhé skupiny.

2. **V případě, že jedna skupina obsahuje tak málo obdélníků, že pro zachování podmínky minima *m* musí obsahovat všechny nezařazené obdélníky, zařaď do ní zbývající obdélníky a konec.**

3. **Pro všechny nezařazené obdélníky spočítej rozdíl ploch o které se zvětší obdélníky první a druhé skupiny začleněním nezařazeného obdélníku.**

4. **Vyber obdélník z 3. který má maximální rozdíl ploch a zařaď ho do skupiny, jejíž celkový obdélní se rozšíří méně. Pokračuj krokem 2.**

Algoritmus dělení uzlu (lineární složitost)

1. **Vyber první dva obdélníky**

   1.1 **Pro každou dimenzi najdi klíče s maximem minima a minimem maxima, stanov „separační vzdálenost“ mezi těmito klíči (minimum minus maximum).**
   1.2 **Normalizuj separační vzdálenost tak, že vzdálenost intervalů podělíš rozsahem všech klíčů v dané dimenzi.**
   1.3 **Vyber dvojici *k,l* s nevětší normalizovanou separační vzdáleností, zařaď je do první a druhé skupiny.**

2. **V případě, že jedna skupina obsahuje tak málo obdélníků, že pro zachování podmínky minima *m* musí obsahovat všechny nezařazené obdélníky, zařaď do ní zbývající obdélníky a konec.**

3. **Vezmi další nezařazený klíč a zařaď jej do takové skupiny, jejíž MBR vyžaduje menší rozšíření.**

Funkce a operace nad geometrickými objekty

OGC:
Konstrukční operace – vytvářejí nové instance geometrie

```
LineFromText
PolygonFromText
.
.
```

Příklad:

```
INSERT INTO
 Countries (Name, Location)
VALUES
('Kenya',
  PolygonFromText('POLYGON ((x y, x y, x y,
  ...,  x y))',14))
```

`'POLYGON (x y, x y, x y,...,  x y)'` – **WKT (the well-known textual representation)**

Podpůrné a manipulační funkce:

```
Dimension(g Geometry)      : Integer
```

Vrací dimenzi geometrie

```
GeometryType(g Geometry)   : String
```

Vrací typ geometrie

```
AsText(g Geometry)         : String
```

Konverze do textové reprezentace

```
AsBinary(g Geometry)       : Binary
```

Konverze do binární reprezentace

```
IsEmpty(g Geometry)        : Integer
```

Testuje prázdnou geometrii

```
IsSimple(g Geometry)       : Integer
```

Test na jednoduchou geometrii geometrii

```
Envelope(g Geometry)       : Geometry
```

MBR omezující obdélník geometrie

```
X(p Point) : number
```

x projekce bodu

```
Y(p Point) : number
```

`y` projekce bodu

`NumPoints(l LineString) : Integer`

Počet bodů v lomené čáře.

`PointN(l LineString, n Integer) : Point`

n-tý bod v lomené čáře.

`ExteriorRing(p Polygon) : LineString`

Obalová hranice areálu

`NumInteriorRing(p Polygon) : Integer`

Počet vnitřních hranic areálu

`InteriorRingN(p Polygon, n Integer) : LineString`

n-tá vnitřní hranice areálu

`NumGeometries(g GeomCollection) : Integer`

Počet geometrických elementů ve složené geometrii.

`GeometryN(g GeomCollection, n Integer) : Geometry`

n-tý geometrický prvek ve složené geometrii

<u>Měřící funkce:</u>

Length(l LineString) : number

Délka lomené čáry (neproblematická operace)

Length(l Polygon) : number

Plocha hranic areálu

Area(l Polygon) : Double Precision

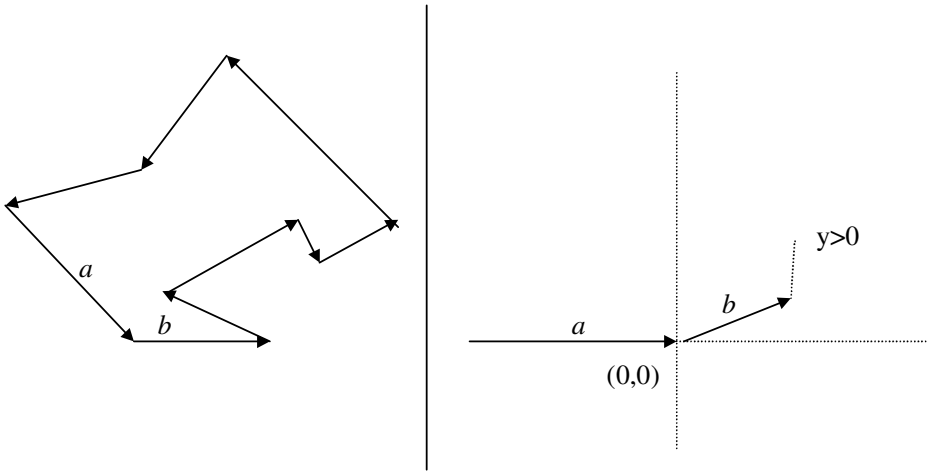
$$A=1/2\Sigma_{Hranice}\Sigma_{Body}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$$

Algoritmus - Určení orientace polygonu

1. **Vyber z hranic oblastí takovou hranici a tři po sobě jdoucí její body tak, aby střední bod měl minimální souřadnici *y* (ze všech souřadnic *y* v polygonu) a první bod měl souřadnici *y* větší, než bod prostřední.**

2. **Rotuj souřadnou soustavu tak, aby orientovaná úsečka definovaná prvními dvěma body splynula s osou *x* v kladném směru.**

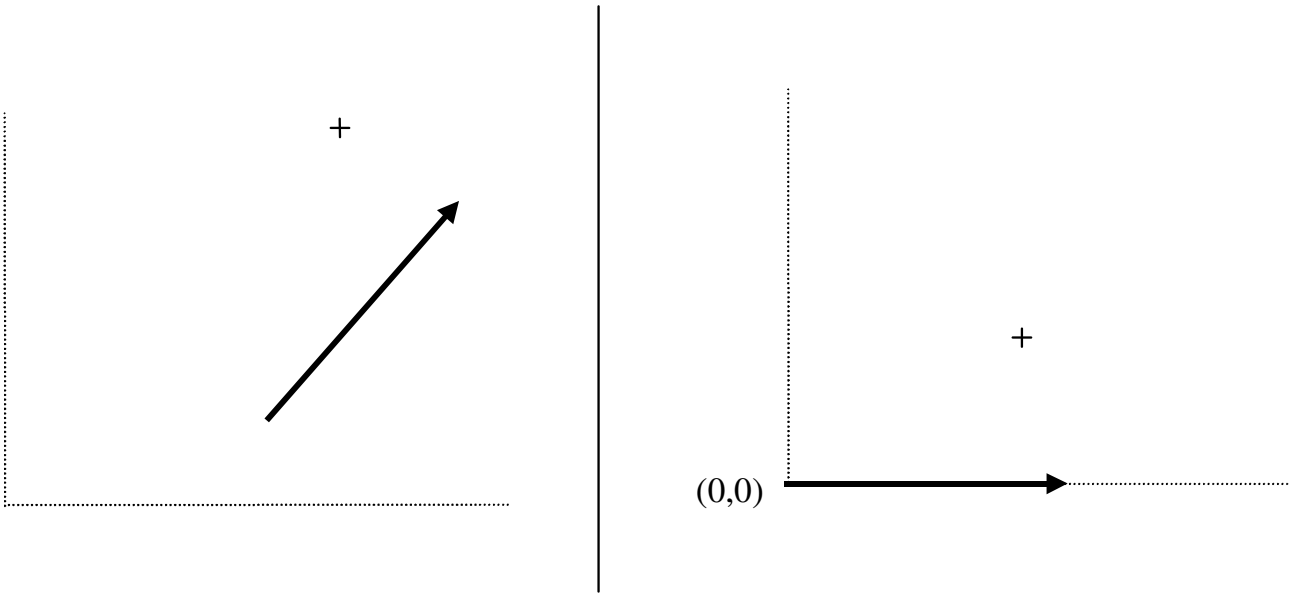
3. **Znaménko souřadnice *y* posledního bodu určuje orientaci polygonu.**



`Distance(g1 Geometry, g2 Geometry) : Double Precision`

Vzdálenost dvou geometrických objektů

Poloha bodu vůči úsečce:

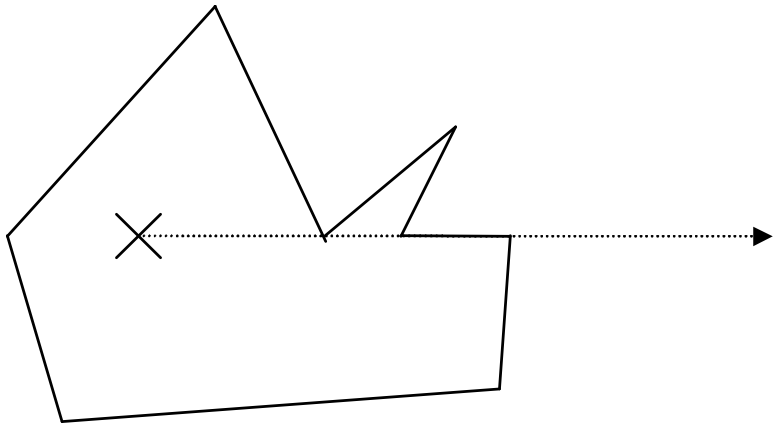


Rotace bodu za účelem určení jeho polohy vzhledem k úsečce

$$x' = x.\cos(\varphi) - y.\sin(\varphi)$$

$$y' = x.\sin(\varphi) + y.\cos(\varphi)$$

Poloha bodu vůči polygonu:



Úniková polopřímka z polygonu

Algoritmus - Bod v polygonu

1. **Najdi v bodech polygonu bod, jehož *y*-ová souřadnice je různá od souřadnice bodu, který testujeme. Jestliže neexistuje, ukonči proceduru s výsledkem LEŹÍ_NA_HRANICI. Nechť *pp* je polopřímka vycházející z testovaného bodu rovnoběžná s osou x v kladném směru.**

2. ***nPrus:=0***

3. **Od vybraného bodu postupně procházej všechny úsečky a proveď body 4 – 7.**

4. **Leží-li testovaný bod na úsečce, ukonči proceduru s výsledkem LEŽÍ_NA_HRANICI.**

5. **Má-li úsečka vlastní průsečík s polopřímkou *pp,* potom *nPrus:=nPrus+1***

6. **Končí-li úsečka na polopřímce a začíná-li mimo polopřímku, stanov podle počátku úsečky *odkud:=POD* nebo *odkud:=NAD***

7. **Začíná-li úsečka na polopřímce a končí-li mimo polopřímku a pokračuje-li do jiné poloroviny, než je stav proměnné *odkud,* potom *nPrus:= nPrus+1.***

8. **Je-li *nPrus* sudý, ukonči proceduru s výsledkem VNĚ.**

9. **Je-li *nPrus* lichý, ukonči proceduru s výsledkem UVNITŘ**

Množinové operace

```
Intersection (g1 Geometry, g2 Geometry)  : Geometry

Difference (g1 Geometry,   g2 Geometry)  : Geometry

Union (g1 Geometry, g2 Geometry)         : Geometry

SymDifference(g1 Geometry, g2 Geometry)  : Geometry

Buffer (g1 Geometry,  d Double Precision): Geometry

ConvexHull(g1 Geometry)                  : Geometry
```

Bod – bod

Triviání operace. Pozor, pro příslušnost bodu k množině je nutné použít vhodnou přístupovou metodu k prostorovým datům.

Bod – lomená čára

Vzájemná poloha úsečka X bod.

Bod – oblast

Poloha bodu vůči polygonu

Lomená čára – lomená čára

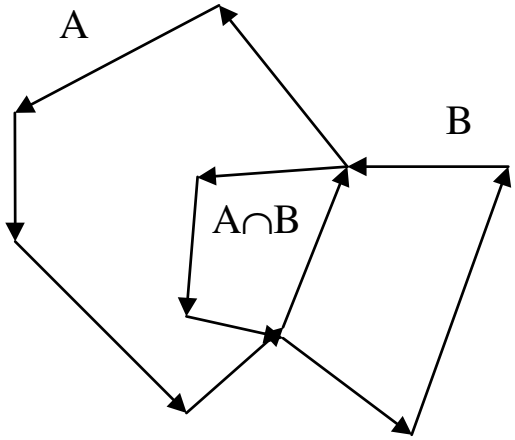
Poloha dvou úseček

Lomená čára – oblast

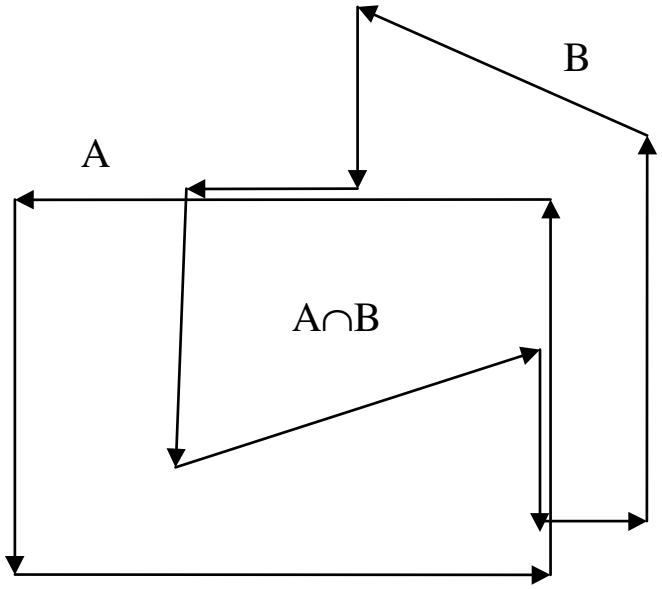
Algoritmus 13 - Průnik lomené čáry s oblastí.

1. **Vstup: oblast a lomená čára.**
2. **Ze vstupní lomené čáry vytvoř seznam *P* segmentů lomené čáry takových, které buď neprotínají hranice oblasti, nebo jsou celé tečné.**
3. **Ze seznamu *P* vytvoř seznam $S \subseteq P$ takový, že libovolný vnitřní bod každého segmentu z *S* leží uvnitř oblasti.**
4. **Zřetěz segmenty z *S* do "co nejdelších" lomených čar, a výsledek pošli na výstup**

Oblast – oblast



Průnik dvou oblastí



Průnik oblastí s tečnými hranicemi

Algoritmus 15 - Průnik dvou oblastí

1. **Vstup: dvě orientované oblasti.**

2. **Všechny hrany hranic oblastí modifikuj tak, aby se vzájemně neprotínaly, mohou však splývat s hranami hranic z druhé oblasti. Potom mají tyto vlastnosti**
   - **hrana splývá s jinou z druhé oblasti**
   - **hrana leží celá uvnitř druhé oblasti**
   - **hrana leží celá vně oblasti**

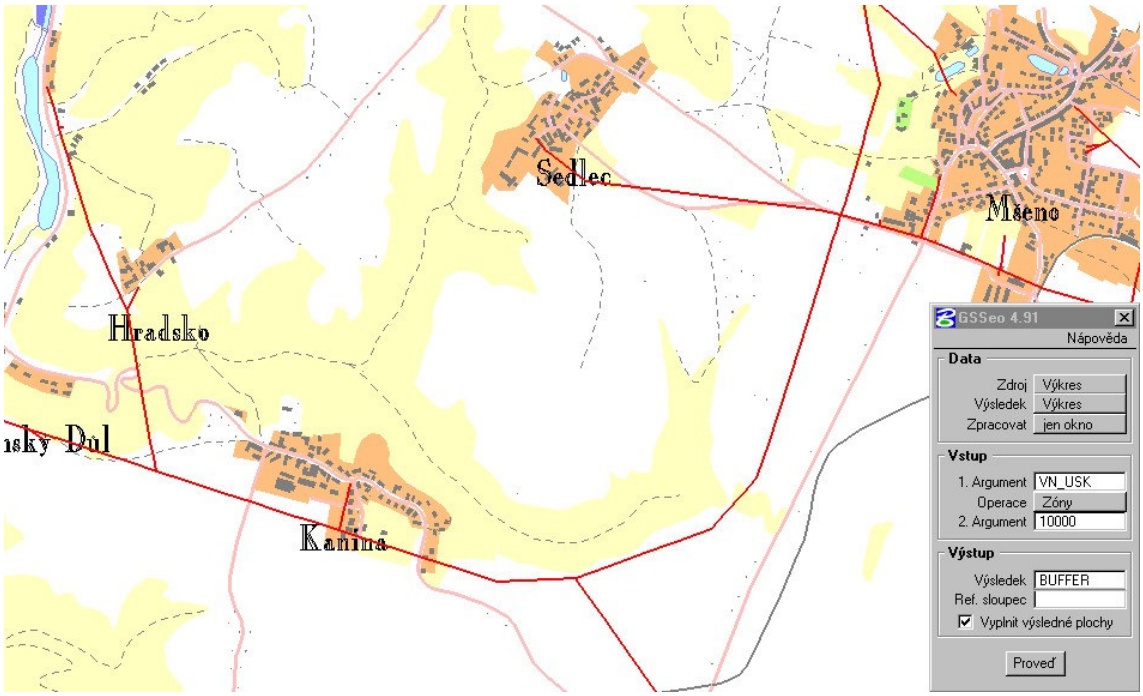
3. **Do seznamu zařaď ty hrany, které buď, leží celé v druhé oblasti, nebo splývají s nějakou hranou z druhé oblasti, se kterou mají stejnou orientaci, (totožné hrany jen jednou).**

4. **Z vybudovaného seznamu zřetěz hranice výsledné oblasti a výsledek pošli na výstup.**

Nástin důkazu, že 4. Je uskutečnitelný…

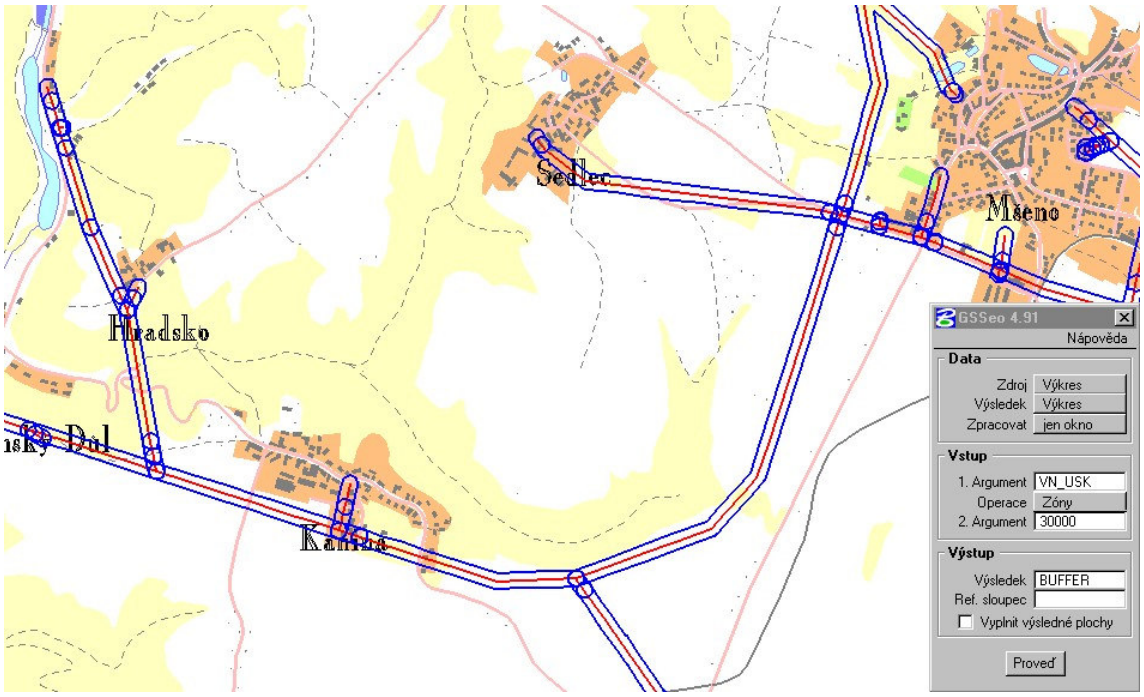
Příklad (systém GeoStore – GEOVAP):

V GIS systému máme (mimo jiné ...) vrstvu lesů reprezentované jako areály a vrstvu venkovních úseků vysokého napětí. Zajímá nás, kde lesy zasahují do bezpečnostního pásma 10 metrů kolem úseků vysokého napětí, a to jen pro určitý výřez území.



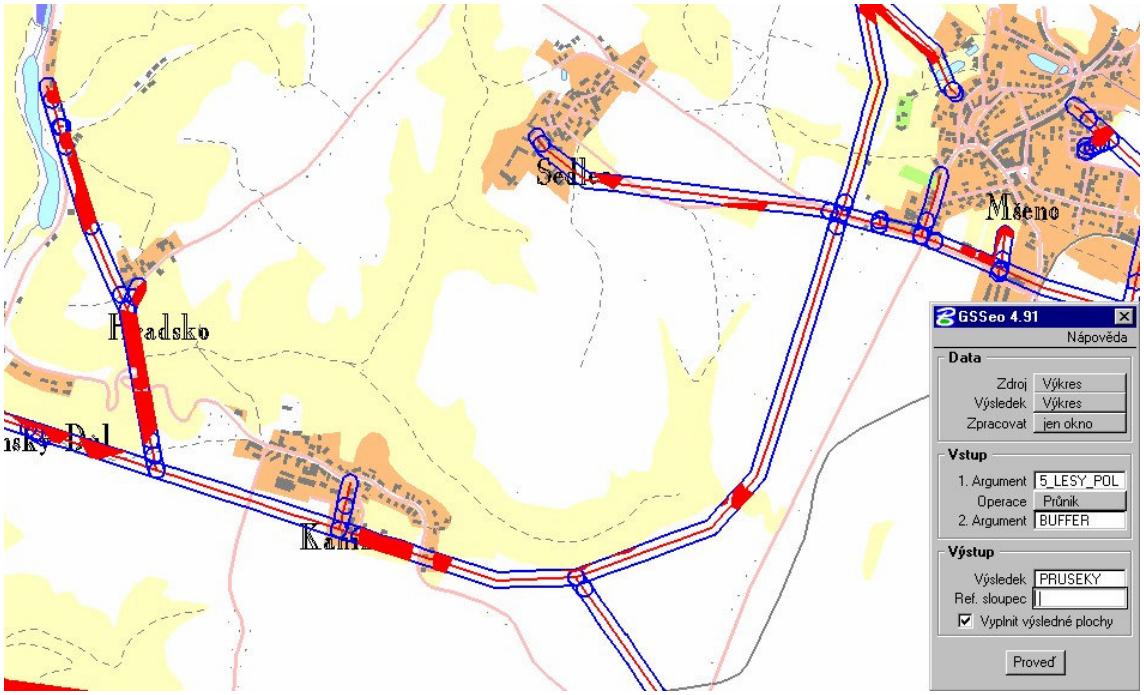
Obr 1.

Zvolíme úlohu „Zóny“, vyplníme vstupní argumenty úlohu – tabulka VN_USK (úseky) a poloměr 10000 mm. Po stisknutí tlačítka „Proveď“ jsou liniové prvky z tabulky VN_USK „obaleny“ zónami o zvoleném poloměru. Výstup bude mít nastavenu tabulku BUFFER. (Obr. 2).



Obr. 2

Zvolíme úlohu „Průnik“, první argument bude tabulka, ve které jsou lesy, druhým argumentem bude tabulka BUFFER (po proběhnutí 1) je nastavena tato tabulka na zónách). Volitelně můžeme zvolit možnost vyplnění výsledných areálů. Po provedení dostaneme kýžený výsledek (Obr. 3).


Sedlec
Měcno
Hradsko
GSSeo 4.91
Nápověda
Data
Zdroj
Výkres
Výsledek
Výkres
Zpracovat
jen okno
Vstup
1. Argument
5_LESY_POL
Operace
Průnik
2. Argument
BUFFER
Výstup
Výsledek
PRUSEKY
Ref. sloupec
Vyplnit výsledné plochy
Proveď

Obr. 3.

Transformace souřadných systémů:

Vstup: Dva seznamy bodů, které si „odpovídají“

$$\{[x_1,y_1]..\ [x_n,y_n]\}$$

$$\{[u_1,v_1]..\ [u_n,v_n]\}$$

Výstup: Parametry transformačních rovnic

Lineárni:

$$f(u,v)=a_1u + b_1v + c_1$$
$$g(u,v)=a_2u + b_2v + c_2$$

Bilineární:

$$f(u,v)=a_1u + b_1v + c_1uv + d_1$$
$$g(u,v)=a_2u + b_2v + c_2uv + d_2$$

Kvadratická, kubická, obecná polynomiální …

Takové, že

$$\Sigma\ dist^2([x_i,y_i],[f(u_i,v_i),g(u_i,v_i)])=min$$

kde

$$dist^2([x_1,y_1],[x_2,y_2])=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

Lineární regrese:

Příklad pro lineární transformaci

$$\Sigma(a_1u_i+b_1v_i+c_1-x_i)^2+(a_2u_i+b_2v_i+c_2-y_i)^2 = \min$$

$$d\Sigma/da_1 = \Sigma 2(a_1u_i + b_1v_i + c_1 - x_i).u_i = 0$$

$$d\Sigma/db_1 = \Sigma 2(a_1u_i + b_1v_i + c_1 - x_i).v_i = 0$$

$$d\Sigma/dc_1 = \Sigma 2(a_1u_i + b_1v_i + c_1 - x_i) = 0$$

Soustava normálních rovnic (pro g(u,v) analogicky):

$$a_1 \Sigma u_i^2 + b_1 \Sigma u_i v_i + c_1 \Sigma u_i = \Sigma x_i u_i$$

$$a_1 \Sigma u_i v_i + b_1 \Sigma v_i^2 + c_1 \Sigma v_i = \Sigma x_i v_i$$

$$a_1 \Sigma u_i + b_1 \Sigma v_i + c_1 . n = \Sigma x_i$$

Rastrová data v GIS

Typy rastrových dat používaných pro GIS technologie jsou stejná jako v počítačové grafice:

- **binární**
- **polotónová**
- **víceúrovňová**

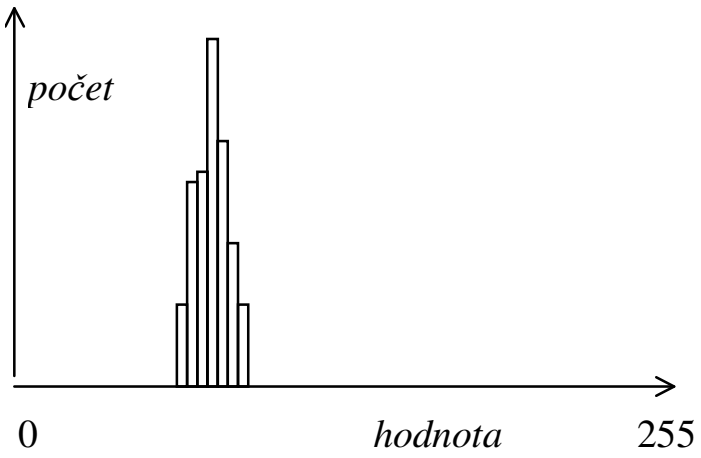
Pro další práci očíslujeme sousedy pixelu P následujícím způsobem:

3	**2**	**1**
4	**P**	**0**
5	**6**	**7**

Sousedé 0,2,4,6 se nazývají *přímí* (d-) sousedé pixelu p.
Sousedé 1,3,5,7 se nazývají *nepřímí* (i-) sousedé pixelu p.

Definice - Histogram obrazu.

Nechť *f* je polotónový obraz barev 1..M. Jeho *histogramem* rozumíme konečnou posloupnost $h(f)=(h_1..h_M)$, kde, h_i je počet pixelů s barvou *i*. □



Obr. 18 - Histogram obrazu

Definice - Matice sousednosti

Nechť f je polotónový obraz barev 1..M. Jeho maticí sousednosti rozumíme čtvercovou MxM matici $CM(f)=\{cm_{ij}\}$, kde, cm_{ij} je počet (přímo) sousedících pixelů o barvě *i* a *j*.□

Lineární filtrace

Buď *f* polotónový obraz, M > 0. Položme

$$g(x,y)= H(M,x,y)$$

kde *H* je libovolná funkce, která v konstantním čase počítá novou hodnotu pixelu *g(x,y)* z okolí pixelu *(x,y)* o rozměru *M*.□

Funkce *H* bývá někdy váženým průměrem pixelů a lze ji vyjádřit:

$$H(M,x,y)=\sum_{i=-M,M} \sum_{j=-M,M} h(i,j)*f(x+i,y+j)$$

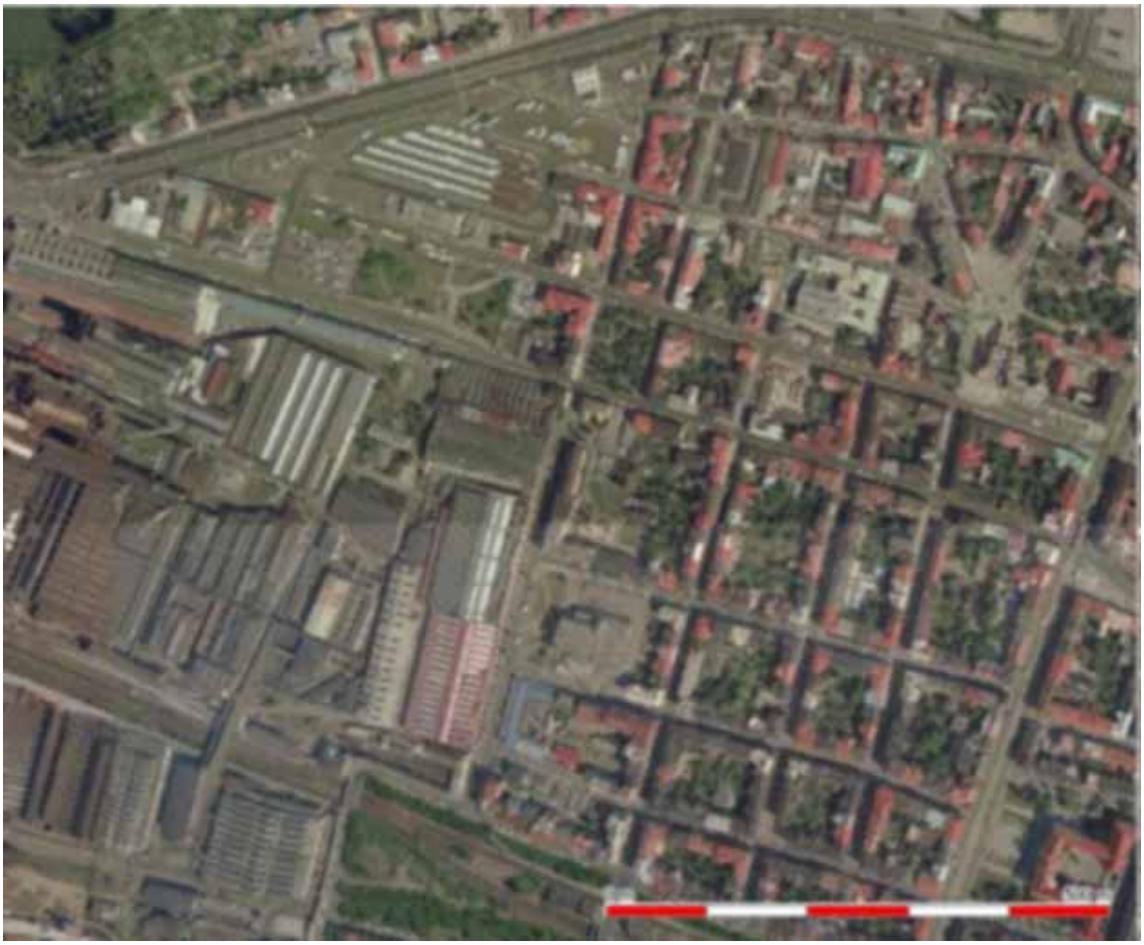
a) Filtry zhlazující filtry

a)

1	1	1
1	1	1
1	1	1

b)

1	2	1
2	4	2
1	2	1



b) Filtry, které se snaží „zostřit“ obraz

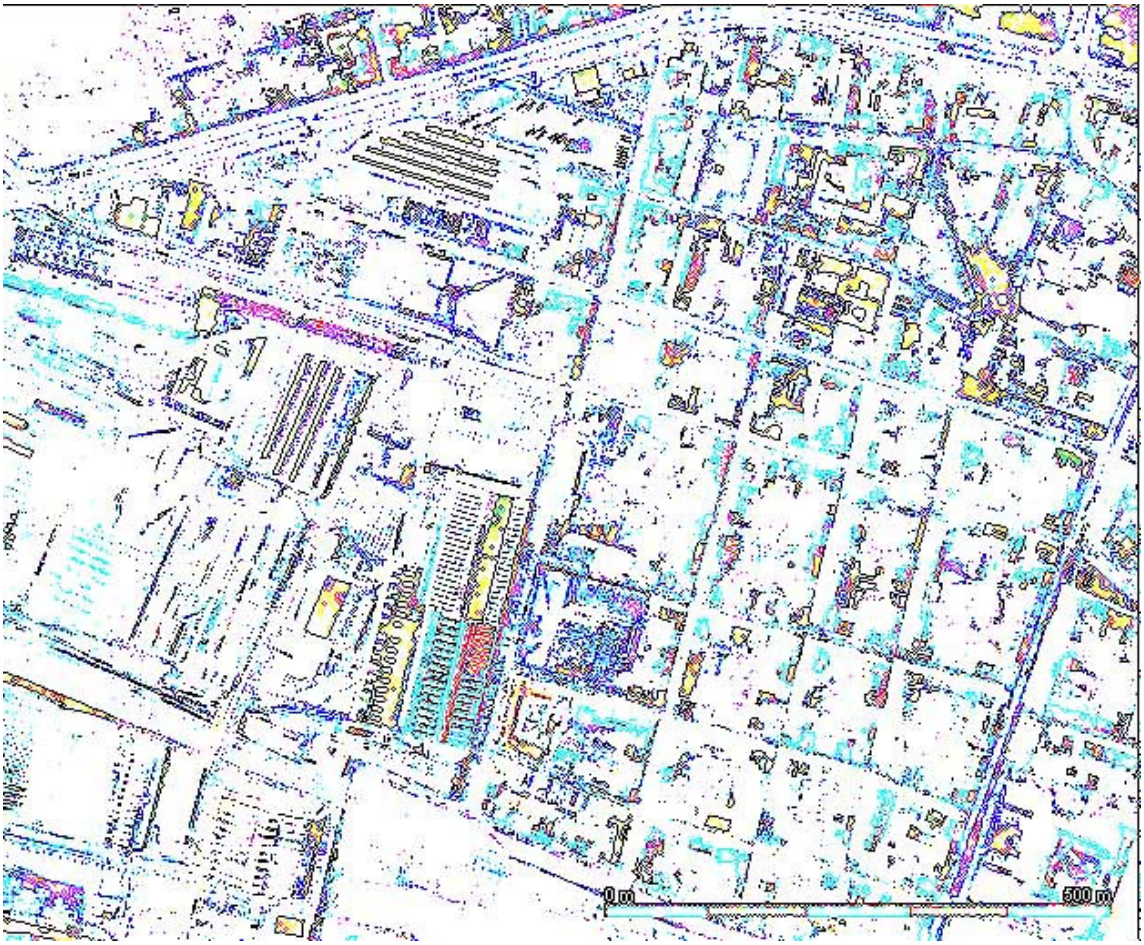
-1	**-1**	**-1**
-1	***n***	**-1**
-1	**-1**	**-1**

c) Detektory hran

Základním filtr této třídy přiřadí novému pixelu největší absolutní hodnotu ze dvou výsledků:

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1



Původní obraz

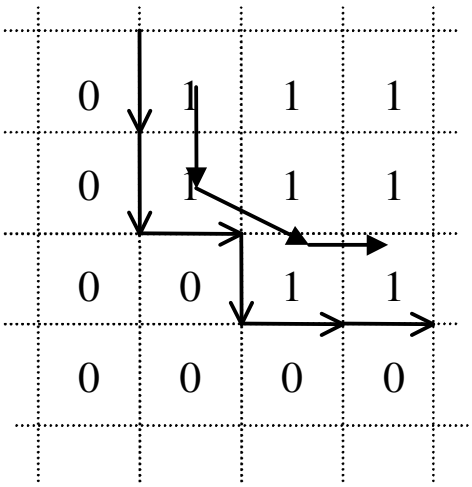
Zhlazovací filtr:

Zostřující filtr:

Detektor hran:

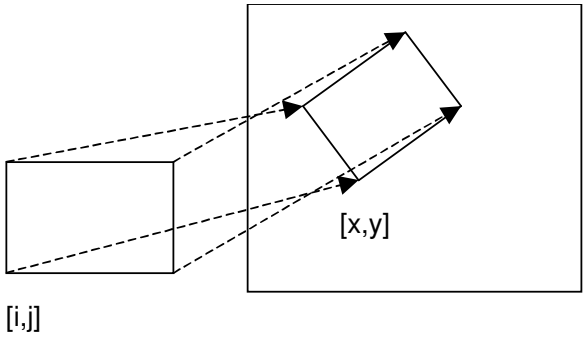
<u>Kontura (hranice) oblasti v binárním obrazu</u>

Nechť *O* je libovolná oblast (množina složená z jedniček) v binárním obrazu, Konturou (hranicí) oblasti *O* rozumíme všechny pixely patřící této oblasti, které mají nulového d-souseda.□



→ vektorově → rastrově

Transformace obrazu



4. **Určíme bodové objekty ve zdrojovém obrazu, jejichž (kartografické) souřadnice jsou známé. Například přesně odečtené z mapy, geodeticky zaměřené apod.**

5. **určíme transformační funkce z nového do starého obrazu (komerční produkty většinou poskytují polynomiální transformaci založené na metodě nejmenších čtverců).**

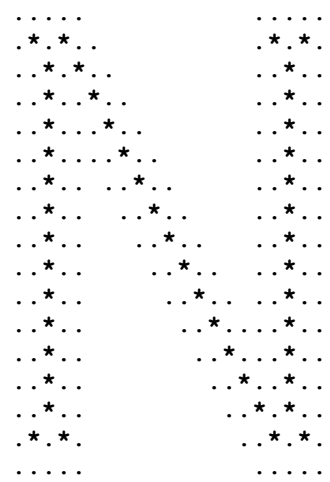
$$i = F(x,y)$$
$$j = G(x,y)$$

kde *(i,j)* značí souřadný systém originálního obrazu, *(x,y)* souřadný systém obrazu nového.

6. **fázi procházíme cílový obraz, pomocí transformačních funkcí *F* a *G* se „díváme“ do originálu a počítáme hodnotu pixelu. Podle toho, z jakého okolí zdrojového pixelu určujeme výslednou hodnotu pixelu nového, se hovoří o metodách**

- **nejbližší soused**
- **bilineární transformace**
- **konvoluce okolí MxM**

První případ prostě přenese hodnotu pixelu do nového obrazu, v dalších případech se výsledná hodnota se počítá z jistého okolí pixelu v originálním obrazu.



Obr. 20 - Skelet binárního obrazu: binární obraz je reprezentován znaky ., jeho skelet znaky *.

<u>Definice 12 - Skelet</u>

Nechť R je množina pixelů, B její hranice (kontura), P bod v R. *Nejbližší soused bodu P na hranici B* je bod M z B takový, že pro každý bod M´ z B , M´ je různý od M je vzdálenost PM´ větší nebo rovna vzdálenosti PM. Má-li bod P více než jednoho nejbližšího souseda, nazývá se *bodem skeletu množiny R*. Sjednocení všech bodů skeletu tvoří *skelet množiny R*.□

Algoritmus 16 - Určení skeletu

1. Urči hranici (konturu) B(R) množiny R.
2. Urči množinu násobných pixelů M(R) v hranici B(R)
3. Je-li B(R) = M(R), skonči.
4. Polož R = R - (B(R) - M(R)) a pokračuj krokem 1.

(a)

A	**A**	**A**
0	**P**	**0**
B	**B**	**B**

(b)

A	**A**	**A**
A	**P**	**0**
A	**0**	**2**

(c)

A	**A**	**C**
0	**P**	**2+**
B	**B**	**C**

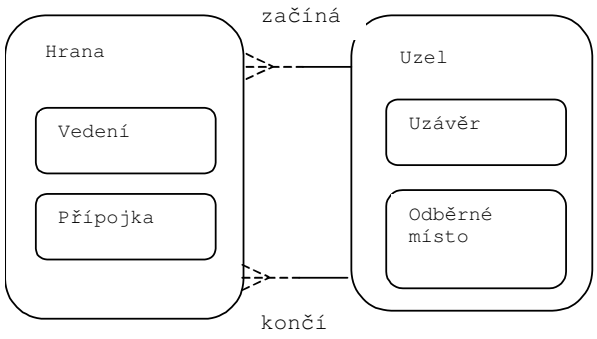
Pixel označený 2 je hraniční pixel, pixel označený 2+ je hraniční nebo násobný pixel.

(a), (b): Alespoň jeden pixel ze skupiny pixelů A, B je nenulový
(c): Alespoň jeden pixel ze skupiny C musí být nenulový. Pokud jsou oba nenulové, pak může být hodnota pixelů ve skupinách A i B libovolná. Pokud je jeden pixel skupiny C nulový, musí být alespoň jeden pixel skupiny A i skupiny B nenulový.

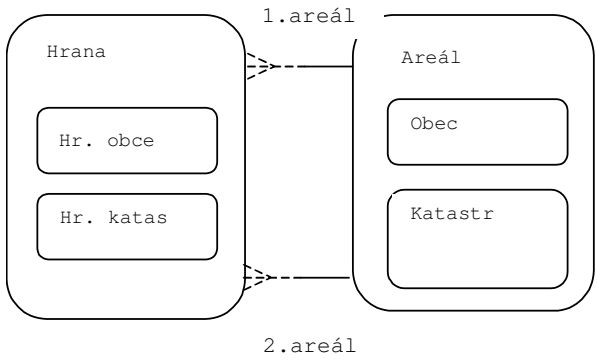
Topologické úlohy:

Byly efektivně řešeny před tím, než byly vůbec GIS technologie vymezeny, přesto je můžeme považovat za součást analytického jádra topologicky orientovaných GIS.

Základní datová struktura síťového grafu:



Základní datová struktura areálového grafu:



Nejčastější úlohy:

- **Trasování grafu - vyber všechny uzly/hrany, které jsou "napájeny" z daného uzlu, hodně používaná úloha pro dispečery sítí, modelování situací „co se stane, když?".**

- **Nejkratší cesta z uzlu do uzlu. Používá se klasický Dijkstrův algoritmus. Lze výhodně využít vlastnosti, že uzly grafu jsou prostorově lokalizovány.**

<u>Algoritmus „Minimální cesta (Best search)"</u>

Nechť (U,H) je graf s nezáporně ohodnocenými hranami, váhu libovolné hrany $h \in H$ označme $w(h)$. Nechť dále každý uzel $u_i \in U$ má 2D souřadnice (x_i,y_i). Pro libovolné uzly u,v označme $d(u,v)$ jejich vzdálenost v E_2. Pro libovolnou hranu $h_i=(u_i,v_i)$ nechť dále je $d(u_i,v_i) \leq w(h)$ – platí trojúhelníková nerovnost metrického prostoru E_2. Potom pro libovolné uzly $u_0,v \in U$ následující postup vede k nalezení minimální cesty z u_0 do v.

Nechť $u_0, u_1,..,u_n=v$ je kritická cesta.

1. **Inicializace: Pro každý uzel $u_i \in U$, $u_i \neq u_0$ položme $d\_path_i=\infty$, $d\_path_0=0$, a položme každý uzel $u_i \in U$ $c\_path_i=NULL$.**

2. **Výběr pivota: Položme $c\_path_i=d\_path_i$ pro takový u_i, pro který je $c\_path_i=NULL$, $d\_path_i<\infty$ a pro který je $d\_path_i+d(u_i,v)$ minimální. Když neexistuje – končíme, cesta neexistuje. Je-li $u_i=v$, potom konec c_path_i je délka minimální cesty a provedeme zpětný chod.**

3. **Expanze: Pro všechny uzly $u_k \in U$ takové, že existuje hrana $h_k \in H$, $h_k=(u_i,u_k)$ (u_i je pivot z předchozího kroku) položme $d\_path_k=min\{d\_path_k, c\_path_i+w(h_k)\}$ a pokračujeme 2.**

A) Má-li u_i přiřazeno dočasné ohodnocení, které je rovno hodnotě kritické cesty, potom bude někdy vybrán jako pivot.

B) Je-li u_i vybrán jako pivot a je-li mu přiřazena trvalá hodnota kritické cesty potom u_{i+1} nebyl vybrán jako pivot před ním.

C) u_{i+1} je potom přiřazena hodnota kritické cesty

D) u_n je přiřazena hodnota kritické cesty

A) C) a D) jsou triviální, B) SE dá dokázat (snad)

- **Problém obchodního cestujícího.**

Topologicko-geometrické úlohy:

- **Vytváření topologických vazeb na základě geometrických vlastostí objektů; jedná se o vytvoření přislušného typu grafu (uzel-hrana, hrana-hrana, areálový graf). Hojně se využívá přístupových metod pro geometrické objekty.**

- **Generování oblastí z hran areálového grafu.**

- **Identifikace hran areálového grafu.**

- **Generování vyšších územních celků areálového grafu.**

- **Kontrola konzistence geometrických a topologických vlastností dat (kontrola shody umístění uzlu a konce hrany s ním incidentní, kontrola křížení hran, kontrola stupňů uzlových bodů a další kontroly)**