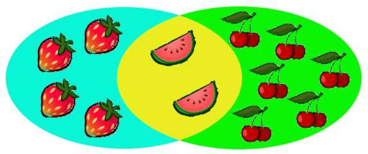
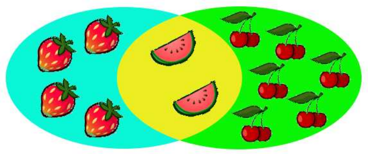
# 3 Množiny, Relace a Funkce

V přehledu matematických formalismů informatiky se v této lekci zaměříme na základní „datové typy“ matematiky, tj. na množiny, relace a funkce. O množinách jste sice zajisté slyšeli už na základní škole, ale podstatou našeho předmětu je uvést povětšinou neformálně známé pojmy na patřičnou formální úroveň nutnou pro teoretické základy informatiky.



# 3 Množiny, Relace a Funkce

V přehledu matematických formalismů informatiky se v této lekci zaměříme na základní „datové typy“ matematiky, tj. na množiny, relace a funkce. O množinách jste sice zajisté slyšeli už na základní škole, ale podstatou našeho předmětu je uvést povětšinou neformálně známé pojmy na patřičnou formální úroveň nutnou pro teoretické základy informatiky.



## Stručný přehled lekce

* Uvedení množin a operací množinového kalkulu.
* Některé vlastnosti množin, princip inkluze a exkluze.
* Relace a definice funkcí, základní vlastnosti.
* Posloupnosti a rekurentní vztahy.

## 3.1 Pojem množiny

* Co je vlastně **množina**?

## 3.1 Pojem množiny

* Co je vlastně **množina**?
  Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď. . .

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“

## 3.1 Pojem množiny

* Co je vlastně **množina**?
  Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď...

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“
- Pozor, není skutečného rozdílu mezi „množinami“ a „prvky“.
  Množiny mohou být prvky jiných množin!

## 3.1 Pojem množiny

- Co je vlastně **množina**?
  Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď...

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“
- Pozor, není skutečného rozdílu mezi „množinami“ a „prvky“.
  Množiny mohou být prvky jiných množin!
- Příklady: $\emptyset$, $\{a,b\}$, $\{b,a\}$, $\{a,b,a\}$, $\{\{a,b\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$,
  $\{x \mid x \text{ je liché přirozené číslo}\}$

## 3.1 Pojem množiny

* Co je vlastně **množina**?
  Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď...

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“
- Pozor, není skutečného rozdílu mezi „množinami“ a „prvky“.
  Množiny mohou být prvky jiných množin!
- Příklady: $\emptyset$, $\{a,b\}$, $\{b,a\}$, $\{a,b,a\}$, $\{\{a,b\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$,
  $\{x \mid x \text{ je liché přirozené číslo}\}$

**Značení**: Počet prvků (*mohutnost*) množiny $A$ zapisujeme $|A|$.

- $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a,b,c\}| = 3$, $|\{\{a,b\},c\}| = 2$

## 3.1 Pojem množiny

* Co je vlastně **množina**?
  Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď...

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“
- Pozor, není skutečného rozdílu mezi „množinami“ a „prvky“.
  Množiny mohou být prvky jiných množin!
- Příklady: $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, b, a\}$, $\{\{a, b\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$,
  $\{x \mid x$ je liché přirozené číslo$\}$

**Značení**: Počet prvků (*mohutnost*) množiny $A$ zapisujeme $|A|$.

- $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a, b, c\}| = 3$, $|\{\{a, b\}, c\}| = 2$

**Značení** množin a jejich prvků:

- $x \in M$ „$x$ je *prvkem* množiny $M$“.

## 3.1 Pojem množiny

✱ Co je vlastně **množina**?
Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď. . .

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*“
- Pozor, není skutečného rozdílu mezi „množinami“ a „prvky“.
  Množiny mohou být prvky jiných množin!
- Příklady: $\emptyset$, $\{a,b\}$, $\{b,a\}$, $\{a,b,a\}$, $\{\{a,b\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$,
  $\{x \mid x$ je liché přirozené číslo$\}$

**Značení**: Počet prvků (*mohutnost*) množiny $A$ zapisujeme $|A|$.

- $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a,b,c\}| = 3$, $|\{\{a,b\},c\}| = 2$

**Značení** množin a jejich prvků:

- $x \in M$ „$x$ je *prvkem* množiny $M$“.
- některé vlastnosti $a \in \{a,b\}$, $a \not\in \{\{a,b\}\}$, $\{a,b\} \in \{\{a,b\}\}$,
- *prázdná* množina $\emptyset$, $a \not\in \emptyset$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \not\in \emptyset$,
- *rovnost* množin $\{a,b\} = \{b,a\} = \{a,b,a\}$, $\{a,b\} \neq \{\{a,b\}\}$.

**Definice**: Množina $A$ je *podmnožinou* množiny $B$, právě když každý prvek $A$ je prvkem $B$. Píšeme $A \subseteq B$ nebo také $B \supseteq A$; říkáme také, že se jedná o *inkluzi*.

**Definice**: Množina $A$ je *podmnožinou* množiny $B$, právě když každý prvek $A$ je prvkem $B$. Píšeme $A \subseteq B$ nebo také $B \supseteq A$; říkáme také, že se jedná o *inkluzi*.

- Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}$, $\quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
- $A \subset B$ právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ $\quad$ ($A$ je *vlastní* podmnožinou $B$).

**Definice**: Množina $A$ je *podmnožinou* množiny $B$, právě když každý prvek $A$ je prvkem $B$. Píšeme $A \subseteq B$ nebo také $B \supseteq A$; říkáme také, že se jedná o *inkluzi*.

- Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}, \quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
- $A \subset B$ právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ ($A$ je *vlastní* podmnožinou $B$).

**Definice**: Dvě množiny jsou si *rovny* $A = B$ právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

- Podle definice jsou množiny $A$ a $B$ stejné, mají-li stejné prvky.

**Definice**: Množina $A$ je *podmnožinou* množiny $B$, právě když každý prvek $A$ je prvkem $B$. Píšeme $A \subseteq B$ nebo také $B \supseteq A$; říkáme také, že se jedná o *inkluzi*.

- Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \not\subseteq \{\{a, b\}\}$, $\quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
- $A \subset B$ právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ $\quad$ ($A$ je *vlastní* podmnožinou $B$).

**Definice**: Dvě množiny jsou si *rovny* $A = B$ právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

- Podle definice jsou množiny $A$ a $B$ stejné, mají-li stejné prvky.
- Důkaz rovnosti množin $A = B$ má obvykle dvě části:
  Odděleně se dokáží inkluze $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

**Značení**: Některé běžné množiny v matematice se značí

* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina přirozených čísel,
* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina celých čísel,
* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina celých kladných čísel,
* $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
* $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel.

**Značení**: Některé běžné množiny v matematice se značí

* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina přirozených čísel,
* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina celých čísel,
* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina celých kladných čísel,
* $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
* $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel.

**Poznámka**: Tyto uvedené číselné množiny jsou vesměs *nekonečné*, na rozdíl od konečných množin uvažovaných v předchozím „naivním“ pohledu.

**Značení**: Některé běžné množiny v matematice se značí

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina přirozených čísel,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je množina celých čísel,
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina celých kladných čísel,
- $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
- $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel.

**Poznámka**: Tyto uvedené číselné množiny jsou vesměs *nekonečné*, na rozdíl od konečných množin uvažovaných v předchozím „naivním“ pohledu.

Pojem nekonečné množiny se přímo v matematice objevil až teprve v 19. století a bylo s ním spojeno několik paradoxů ukazujících, že naivní pohled na teorii množin pro nekonečné množiny nedostačuje. My se k problematice nekonečných množin, Kantorově větě a Russelově paradoxu vrátíme v závěru našeho předmětu.

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$A \cup B \quad = \quad \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}$$

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,. \end{aligned}$$

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$.

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$.
- Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a,b,c\} \cup \{a,d\} = \{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\} \cap \{a,d\} = \{a\}$.
- Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**Definice**: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí $I$ rozšířeně

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\}$$

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,,$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,.$$

- Příklady $\{a,b,c\} \cup \{a,d\} = \{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\} \cap \{a,d\} = \{a\}$.
- Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**Definice**: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí $I$ rozšířeně

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\}\,,$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\}\,.$$

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$.
- Vždy platí „distributivita“ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**Definice**: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí $I$ rozšířeně

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\}\,, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\}\,. \end{aligned}$$

- Nechť $A_i = \{2.i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je množina všech sudých přirozených čísel.

## 3.2 Množinové operace

**Definice**: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a,b,c\} \cup \{a,d\} = \{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\} \cap \{a,d\} = \{a\}$.
- Vždy platí „distributivita" $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**Definice**: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí $I$ rozšířeně

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro nějaké } i \in I\}, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro každé } i \in I\}. \end{aligned}$$

- Nechť $A_i = \{2.i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je množina všech sudých přirozených čísel.
- Nechť $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \emptyset$.

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$A \setminus B \;=\; \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \not\in B\}$$

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \not\in B\}\,, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}\,, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a, b, c\} \setminus \{a, b, d\} = \{c\}$, $\{a, b, c\} \Delta \{a, b, d\} = \{c, d\}$.

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}\,, \\ A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\{a,b,c\}\Delta\{a,b,d\} = \{c,d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\},$$
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\{a,b,c\} \Delta \{a,b,d\} = \{c,d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

**Definice**: Nechť $A \subseteq M$. *Doplněk* $A$ *vzhledem k* $M$ je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k *nosné množině* $M$ !

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}\,, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a, b, c\} \setminus \{a, b, d\} = \{c\}$, $\{a, b, c\} \Delta \{a, b, d\} = \{c, d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

**Definice**: Nechť $A \subseteq M$. *Doplněk* $A$ *vzhledem k* $M$ je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k *nosné množině* $M$ !
- Je-li $M = \{a, b, c\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a, b\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \emptyset$.

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}\,, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\quad \{a,b,c\}\Delta\{a,b,d\} = \{c,d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

**Definice**: Nechť $A \subseteq M$. *Doplněk* $A$ *vzhledem k* $M$ je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k *nosné množině* $M$ !
- Je-li $M = \{a,b,c\}$, pak $\overline{\{a,b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a,b\}$, pak $\overline{\{a,b\}} = \emptyset$.
- Vždy pro $A \subseteq M$ platí $\overline{\overline{A}} = A$ („dvojí“ doplněk).

**Definice**: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* $\Delta$ dvou množin $A, B$ definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}\,, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a, b, c\} \setminus \{a, b, d\} = \{c\}$, $\{a, b, c\}\Delta\{a, b, d\} = \{c, d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

**Definice**: Nechť $A \subseteq M$. *Doplněk $A$ vzhledem k $M$* je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k *nosné množině $M$*!
- Je-li $M = \{a, b, c\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a, b\}$, pak $\overline{\{a, b\}} = \emptyset$.
- Vždy pro $A \subseteq M$ platí $\overline{\overline{A}} = A$ („dvojí“ doplněk).
- Vždy pro $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(Viz Vennovy diagramy.)

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

**Příklad 3.1.** *Co je podle definice* $(a, a)$*?*

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

**Příklad 3.1.** *Co je podle definice* $(a, a)$*?*

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

**Příklad 3.1.** *Co je podle definice* $(a, a)$*?*

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. □

**Definice 3.2.** **Kartézský součin** dvou množin $A, B$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z $A$ a $B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

**Příklad 3.1.** *Co je podle definice* $(a, a)$*?*

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. □

**Definice 3.2.** **Kartézský součin** dvou množin $A, B$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z $A$ a $B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} .$$

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$, $\{c\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b)\}$.

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

**Příklad 3.1.** *Co je podle definice* $(a, a)$*?*

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. $\square$

**Definice 3.2.** **Kartézský součin** dvou množin $A, B$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z $A$ a $B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$, $\{c\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b)\}$.
- Platí $\emptyset \times X = \emptyset$ pro každou množinu $X$.

## Uspořádané dvojice a kartézský součin

**Definice**: *Uspořádaná dvojice* $(a, b)$ je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

**Fakt**: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

**Příklad 3.1.** *Co je podle definice* $(a, a)$*?*

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. $\Box$

**Definice 3.2. Kartézský součin** dvou množin $A, B$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z $A$ a $B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$, $\{c\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b)\}$.
- Platí $\emptyset \times X = \emptyset$ pro každou množinu $X$.
- Mnemotechnická pomůcka

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

## Skládání součinu

**Definice**: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou $k$-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

## Skládání součinu

**Definice**: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou $k$-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

**Fakt**: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$.

## Skládání součinu

**Definice**: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou $k$-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

**Fakt**: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$.

**Definice** *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$

## Skládání součinu

**Definice**: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou k-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

**Fakt**: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$.

**Definice** *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$

- Příklad $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Co je $A^0$?

## Skládání součinu

**Definice**: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou $k$-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

**Fakt**: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$.

**Definice** *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\} .$$

- Příklad $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Co je $A^0$? $\{\emptyset\}$, neboť jediná uspořádaná $0$-tice je právě prázdná $\emptyset$.

**Poznámka**: Podle uvedené definice není součin asociativní, tj. obecně nemusí platit, že $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

## Skládání součinu

**Definice**: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou $k$-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$.

**Fakt**: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$.

**Definice** *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$

- Příklad $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Co je $A^0$? $\{\emptyset\}$, neboť jediná uspořádaná $0$-tice je právě prázdná $\emptyset$.

**Poznámka**: Podle uvedené definice není součin asociativní, tj. obecně nemusí platit, že $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

V matematické praxi je někdy výhodnější uvažovat „upravenou“ definici, podle níž součin asociativní je. Pro účely této přednášky není podstatné, k jaké definici se přikloníme. Prezentované definice a věty „fungují“ pro obě varianty.

## Potenční množina

**Definice 3.3.** **Potenční množina** množiny $A$,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

## Potenční množina

**Definice 3.3. Potenční množina** množiny $A$,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

- Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- $2^{\{a\}\times\{a,b\}} = \{\emptyset, \{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}\}$.

## Potenční množina

**Definice 3.3.** **Potenční množina** množiny $A$,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

- Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- $2^{\{a\}\times\{a,b\}} = \{\emptyset, \{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}\}$.

**Věta 3.4.** *Počet prvků potenční množiny splňuje* $|2^A| = 2^{|A|}$.

## Potenční množina

**Definice 3.3.** **Potenční množina** množiny $A$,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

- Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- $2^{\{a\}\times\{a,b\}} = \{\emptyset, \{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}\}$.

**Věta 3.4.** *Počet prvků potenční množiny splňuje* $|2^A| = 2^{|A|}$.

**Důkaz**: Stručně indukcí podle $|A|$: Pro $A = \emptyset$ platí $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1$.

Pro každý další prvek $b \not\in A$ rozdělíme všechny podmnožiny $A \cup \{b\}$ napolovic na ty neobsahující $b$ a na ty obsahující $b$, tudíž

$$|2^{A\cup\{b\}}| = 2 \cdot |2^A| = 2^{|A|+1}\,.$$

□

## 3.3 Porovnávání a určení množin

**Věta 3.5.** *Pro každé dvě množiny* $A, B \subseteq M$ *platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

## 3.3 Porovnávání a určení množin

**Věta 3.5.** *Pro každé dvě množiny $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.*

**Důkaz** v obou směrech rovnosti.

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:

## 3.3 Porovnávání a určení množin

**Věta 3.5.** *Pro každé dvě množiny* $A, B \subseteq M$ *platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Důkaz** v obou směrech rovnosti.

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - ∗ Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - ∗ To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

## 3.3 Porovnávání a určení množin

**Věta 3.5.** *Pro každé dvě množiny* $A, B \subseteq M$ *platí* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Důkaz** v obou směrech rovnosti.

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, právě když $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.

## 3.3 Porovnávání a určení množin

**Věta 3.5.** *Pro každé dvě množiny $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.*

**Důkaz** v obou směrech rovnosti.

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, právě když $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - To znamená $x \notin A \cup B$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A \cup B}$.

$\square$

**Věta 3.6.** *Pro každé tři množiny $A, B, C$ platí*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

**Věta 3.6.** *Pro každé tři množiny $A, B, C$ platí*

$$A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)\,.$$

**Důkaz**.

- $A \setminus (B \cap C) \;\subseteq\; (A \setminus B) \;\cup (A \setminus C)$:
  - Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$.
  - Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.

**Věta 3.6.** *Pro každé tři množiny $A, B, C$ platí*

$$A \setminus (B \cap C) \; = \; (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)\,.$$

**Důkaz**.

- $A \setminus (B \cap C) \; \subseteq \; (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)$:
  - $*$ Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$.
  - $*$ Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.
- Naopak $A \setminus (B \cap C) \; \supseteq \; (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)$:
  - $*$ Je-li $x \in (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)$, pak $x \in (A \setminus B)$ nebo $x \in (A \setminus C)$.
  - $*$ Pro první možnost máme $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, z čehož plyne $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, a tudíž $x \in A \setminus (B \cap C)$.

**Věta 3.6.** *Pro každé tři množiny $A, B, C$ platí*

$$A \setminus (B \cap C) \; = \; (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C) \, .$$

**Důkaz**.

- $A \setminus (B \cap C) \; \subseteq \; (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)$:
  - $*$ Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$.
  - $*$ Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.
- Naopak $A \setminus (B \cap C) \; \supseteq \; (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)$:
  - $*$ Je-li $x \in (A \setminus B) \; \cup (A \setminus C)$, pak $x \in (A \setminus B)$ nebo $x \in (A \setminus C)$.
  - $*$ Pro první možnost máme $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, z čehož plyne $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, a tudíž $x \in A \setminus (B \cap C)$.
  - $*$ Druhá možnost je analogická.

$\square$

## Charakteristický vektor (pod)množiny

V případech, kdy všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké *nosné množiny* $X$, což není neobvyklé v programátorských aplikacích, s výhodou využijeme následující reprezentaci množin.

**Definice**: Mějme nosnou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pro $A \subseteq X$ definujeme charakteristický vektor $\chi_A$ jako

$\chi_A = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, kde $c_i = 1$ pro $x_i \in A$ a $c_i = 0$ jinak.

## Charakteristický vektor (pod)množiny

V případech, kdy všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké *nosné množiny* $X$, což není neobvyklé v programátorských aplikacích, s výhodou využijeme následující reprezentaci množin.

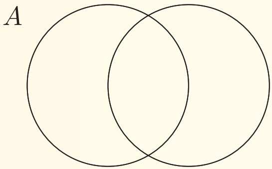
**Definice**: Mějme nosnou množinu $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Pro $A \subseteq X$ definujeme charakteristický vektor $\chi_A$ jako

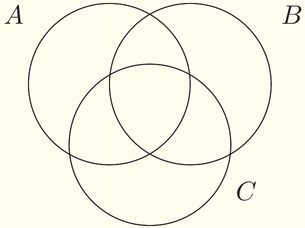
$$\chi_A = (c_1, c_2, \dots, c_n), \text{ kde } c_i = 1 \text{ pro } x_i \in A \text{ a } c_i = 0 \text{ jinak.}$$

- Platí $A = B$ právě když $\chi_A = \chi_B$.
- Množinové operace jsou realizovány „bitovými funkcemi“ sjednocení $\sim$ OR, průnik $\sim$ AND, symetrický rozdíl $\sim$ XOR.

## Princip inkluze a exkluze

Tento důležitý a zajímavý kombinatorický princip je někdy také nazýván „princip *zapojení a vypojení*“.



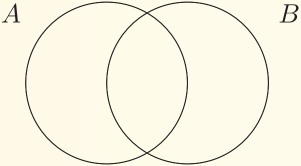

**Věta 3.7.** *Počet prvků ve sjednocení dvou či tří množin spočítáme:*

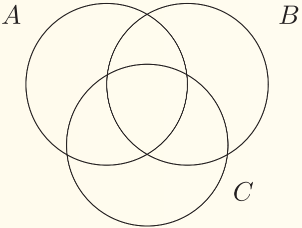
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

## Princip inkluze a exkluze

Tento důležitý a zajímavý kombinatorický princip je někdy také nazýván „princip *zapojení a vypojení*“.




**Věta 3.7.** *Počet prvků ve sjednocení dvou či tří množin spočítáme:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Všimněte si, že větu lze stejně tak využít k výpočtu počtu prvků v průniku množin...

**Příklad 3.8.** *Z* $1000$ *televizí jich při první kontrole na výrobní lince má* $5$ *vadnou obrazovku,* $10$ *je poškrábaných a* $12$ *má jinou závadu. Přitom* $3$ *televize mají současně všechny tři vady a* $4$ *jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu.*
*Kolik televizí je celkem vadných?*

**Příklad 3.8.** *Z $1000$ televizí jich při první kontrole na výrobní lince má $5$ vadnou obrazovku, $10$ je poškrábaných a $12$ má jinou závadu. Přitom $3$ televize mají současně všechny tři vady a $4$ jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu. Kolik televizí je celkem vadných?*

**Řešení:** Dosazením do Věty 3.7 zjistíme výsledek $17$.

**Příklad 3.8.** *Z* $1000$ *televizí jich při první kontrole na výrobní lince má* $5$ *vadnou obrazovku,* $10$ *je poškrábaných a* $12$ *má jinou závadu. Přitom* $3$ *televize mají současně všechny tři vady a* $4$ *jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu.*
*Kolik televizí je celkem vadných?*

**Řešení:** Dosazením do Věty 3.7 zjistíme výsledek $17$. □

**Poznámka**. Jen stručně, bez důkazu a bližšího vysvětlení, si uvedeme obecnou formu principu inkluze a exkluze:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

(Jeho znalost nebude v předmětu vyžadována.)

## 3.4 Relace a funkce mezi (nad) množinami

Dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme zvýšenou pozornost.

**Definice 3.9.** **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k .$$

## 3.4 Relace a funkce mezi (nad) množinami

Dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme zvýšenou pozornost.

**Definice 3.9.** **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k \,.$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci $R$ na $A$*.

## 3.4 Relace a funkce mezi (nad) množinami

Dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme zvýšenou pozornost.

**Definice 3.9.** **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k \,.$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci $R$ na $A$*.

Příklady relací.

- $\{(1,a),(2,a)\}$ je relace mezi $\{1,2,3\}$ a $\{a,b\}$.
- $\{(i,2.i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je binární relace na $\mathbb{N}$.

## 3.4 Relace a funkce mezi (nad) množinami

Dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme zvýšenou pozornost.

**Definice 3.9.** **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k\,.$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci $R$ na $A$*.

Příklady relací.

- $\{(1, a), (2, a)\}$ je relace mezi $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b\}$.
- $\{(i, 2.i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je binární relace na $\mathbb{N}$.
- $\{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ je ternární relace na $\mathbb{N}$.
- $\{3.i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je unární relace na $\mathbb{N}$.

## 3.4 Relace a funkce mezi (nad) množinami

Dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme zvýšenou pozornost.

**Definice 3.9.** **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k \, .$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci $R$ na $A$*.

Příklady relací.

- $\{(1, a), (2, a)\}$ je relace mezi $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b\}$.
- $\{(i, 2.i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je binární relace na $\mathbb{N}$.
- $\{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ je ternární relace na $\mathbb{N}$.
- $\{3.i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je unární relace na $\mathbb{N}$.
- Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na $A$?

## Funkce mezi množinami

**Definice 3.10. (Totální) funkce** z množiny $A$ do množiny $B$ je relace $f$ mezi $A$ a $B$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

## Funkce mezi množinami

**Definice 3.10.** **(Totální) funkce** z množiny $A$ do množiny $B$ je relace $f$ mezi $A$ a $B$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

Množina $A$ se nazývá *definiční obor* a množina $B$ *obor hodnot* funkce $f$.

Neformálně řečeno, ve funkci $f$ je každé „vstupní“ hodnotě $x$ přiřazena jednoznačně „výstupní“ hodnota $y$.

(V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme…)

## Funkce mezi množinami

**Definice 3.10.** **(Totální) funkce** z množiny $A$ do množiny $B$ je relace $f$ mezi $A$ a $B$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

Množina $A$ se nazývá *definiční obor* a množina $B$ *obor hodnot* funkce $f$.

Neformálně řečeno, ve funkci $f$ je každé „vstupní“ hodnotě $x$ přiřazena jednoznačně „výstupní“ hodnota $y$.

(V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme...)

**Značení**: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

Zápis $f : A \to B$ říká, že $f$ je funkce s def. oborem $A$ a oborem hodnot $B$.

## Funkce mezi množinami

**Definice 3.10.** **(Totální) funkce** z množiny $A$ do množiny $B$ je relace $f$ mezi $A$ a $B$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

Množina $A$ se nazývá *definiční obor* a množina $B$ *obor hodnot* funkce $f$.

Neformálně řečeno, ve funkci $f$ je každé „vstupní“ hodnotě $x$ přiřazena jednoznačně „výstupní“ hodnota $y$.

(V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme. . . )

**Značení**: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

Zápis $f : A \to B$ říká, že $f$ je funkce s def. oborem $A$ a oborem hodnot $B$.

Funkcím se také říká *zobrazení*.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x+8$. Tj. $f = \{(x, x+8) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

## Funkce mezi množinami

**Definice 3.10.** **(Totální) funkce** z množiny $A$ do množiny $B$ je relace $f$ mezi $A$ a $B$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

Množina $A$ se nazývá *definiční obor* a množina $B$ *obor hodnot* funkce $f$.

Neformálně řečeno, ve funkci $f$ je každé „vstupní" hodnotě $x$ přiřazena jednoznačně „výstupní" hodnota $y$.

(V obecné relaci počty „přiřazených" dvojic neomezujeme. . . )

**Značení**: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

Zápis $f : A \to B$ říká, že $f$ je funkce s def. oborem $A$ a oborem hodnot $B$.

Funkcím se také říká *zobrazení*.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x+8$. Tj. $f = \{(x, x+8) \mid x \in \mathbb{N}\}$.
- Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$. Tj. $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

**Definice**: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z $A$ do $B$.

**Definice**: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z $A$ do $B$.

V parciální funkci $p$ nemusí být pro některé „vstupní" hodnoty $x$ funkční hodnota definována.

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

**Definice**: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z $A$ do $B$.

V parciální funkci $p$ nemusí být pro některé „vstupní“ hodnoty $x$ funkční hodnota definována.

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

Další příklady funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

**Definice**: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z $A$ do $B$.

V parciální funkci $p$ nemusí být pro některé „vstupní" hodnoty $x$ funkční hodnota definována.

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

Další příklady funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

- Také funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) = \sqrt{x}$$

  je jen parciální – není definována pro $x < 0$.

**Definice**: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z $A$ do $B$.

V parciální funkci $p$ nemusí být pro některé „vstupní" hodnoty $x$ funkční hodnota definována.

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

Další příklady funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

- Také funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) = \sqrt{x}$$

  je jen parciální – není definována pro $x < 0$.

- Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich rodná čísla?

## 3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

**Definice**: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu zápisu $p_n$.

## 3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

**Definice**: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu zápisu $p_n$.

**Poznámka**: Obor hodnot posloupnosti může být i jiný než reálná čísla. Na posloupnost se také díváme jako na „seřazení“ vybraných prvků z oboru hodnot, s povoleným opakováním hodnot (nemusí být prostá).

## 3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

**Definice**: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu zápisu $p_n$.

**Poznámka**: Obor hodnot posloupnosti může být i jiný než reálná čísla. Na posloupnost se také díváme jako na „seřazení“ vybraných prvků z oboru hodnot, s povoleným opakováním hodnot (nemusí být prostá).

Také def. obor posl. může být od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \dots, p_i = 2i, \dots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel.

## 3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

**Definice**: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního" zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou" formu zápisu $p_n$.

**Poznámka**: Obor hodnot posloupnosti může být i jiný než reálná čísla. Na posloupnost se také díváme jako na „seřazení" vybraných prvků z oboru hodnot, s povoleným opakováním hodnot (nemusí být prostá).

Také def. obor posl. může být od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \dots, p_i = 2i, \dots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel.
  - $3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \dots$ je posloupnost postupných dekadických rozvojů $\pi$.
  - $1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$.

## 3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

**Definice**: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního" zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou" formu zápisu $p_n$.

**Poznámka**: Obor hodnot posloupnosti může být i jiný než reálná čísla. Na posloupnost se také díváme jako na „seřazení" vybraných prvků z oboru hodnot, s povoleným opakováním hodnot (nemusí být prostá).

Také def. obor posl. může být od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \dots, p_i = 2i, \dots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel.
  - $3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \dots$ je posloupnost postupných dekadických rozvojů $\pi$.
  - $1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$.
  - Pokud chceme stejnou posloupnost $1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots$ zadat jako $q_i$, $i \geq 1$, tak ji určíme vzorcem $q_i = (-1)^{i-1}$.

## 3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

**Definice**: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu zápisu $p_n$.

**Poznámka**: Obor hodnot posloupnosti může být i jiný než reálná čísla. Na posloupnost se také díváme jako na „seřazení“ vybraných prvků z oboru hodnot, s povoleným opakováním hodnot (nemusí být prostá).

Také def. obor posl. může být od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \ldots, p_i = 2i, \ldots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel.
  - $3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \ldots$ je posloupnost postupných dekadických rozvojů $\pi$.
  - $1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$.
  - Pokud chceme stejnou posloupnost $1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$ zadat jako $q_i$, $i \geq 1$, tak ji určíme vzorcem $q_i = (-1)^{i-1}$.
- Posloupnost je *rostoucí* či *klesající*, pokud $p_{n+1} > p_n$ či $p_{n+1} < p_n$ pro všechna $n$.

## Rekurentní definice posloupnosti

Slovem *rekurentní* označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe.

(Už jste se setkali s „rekurzí“ při programování? A víte, co znamená?)

## Rekurentní definice posloupnosti

Slovem *rekurentní* označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe.

(Už jste se setkali s „rekurzí“ při programování? A víte, co znamená?)

Ukázky **rekurentních vztahů**:

- Zadáme-li posloupnost $p_n$ vztahy $p_0 = 1$ a $p_n = 2p_{n-1}$ pro $n > 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna $n$.

## Rekurentní definice posloupnosti

Slovem *rekurentní* označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe.

(Už jste se setkali s „rekurzí“ při programování? A víte, co znamená?)

Ukázky **rekurentních vztahů**:

- Zadáme-li posloupnost $p_n$ vztahy $p_0 = 1$ a $p_n = 2p_{n-1}$ pro $n > 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna $n$.
- Obdobně můžeme zadat posloupnost $q_n$ vztahy $q_1 = 1$ a $q_n = q_{n-1} + n$ pro $n > 1$. Potom platí $q_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pro všechna $n$.
  Uměli byste toto dokázat indukcí?

## Rekurentní definice posloupnosti

Slovem *rekurentní* označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe.

(Už jste se setkali s „rekurzí" při programování? A víte, co znamená?)

Ukázky **rekurentních vztahů**:

- Zadáme-li posloupnost $p_n$ vztahy $p_0 = 1$ a $p_n = 2p_{n-1}$ pro $n > 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna $n$.
- Obdobně můžeme zadat posloupnost $q_n$ vztahy $q_1 = 1$ a $q_n = q_{n-1} + n$ pro $n > 1$. Potom platí $q_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pro všechna $n$.
  Uměli byste toto dokázat indukcí?
- Známá Fibonacciho posloupnost je zadaná vztahy $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$.