

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):
 - (a) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ platí: pokud $g \circ f$ je injektivní, pak f nebo g je injektivní.
 - (b) **ano** — **ne** Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje uspořádání R množiny \mathbb{N} takové, že n je největší prvek uspořádané množiny (\mathbb{N}, R) .
 - (c) **ano** — **ne** Má-li podmnožina uspořádané množiny infimum, pak má i supremum.
 - (d) **ano** — **ne** Pro libovolné prvočíslo n je (\mathbb{Z}_n, \cdot) grupa.
 - (e) **ano** — **ne** Pokud binární relace R na množině A je reflexivní, pak R^{-1} je také reflexivní.
 - (f) **ano** — **ne** Existuje jediný izomorfismus uspořádané množiny (\mathbb{Z}, \leq) na sebe.
 - (g) **ano** — **ne** Množina všech bijekcí množiny \mathbb{N} do sebe je spočetná.
2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A . Definujte všechny užití pojmy. Definujte pojmy maximálního a největšího prvku. Jaký vztah je mezi těmito prvky. Definujte infima podmnožiny uspořádané množiny.
3. (3krát 2 body) Házíme zároveň bílou, zelenou a černou hrací kostkou. Každá má 6 stěn očíslovaných čísly 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Kolik
 - (a) různých výsledků můžeme dostat;
 - (b) různých výsledků, kde na bílé kostce je větší číslo než na černé, můžeme dostat;
 - (c) je těch výsledků, při nichž je součet čísel roven 16.
4. (5krát 2 body) Udejte příklad
 - (a) nekonečné, nespočetné uspořádané množiny;
 - (b) konečného tělesa;
 - (c) izotonního zobrazení z (\mathbb{Z}, \leq) do (\mathbb{N}, \leq) ;
 - (d) relací $\rho \neq \sigma$ na množině $M = \{a, b\}$ takových, že $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.
 - (e) uspořádání pětiprvkové množiny, kde 2 prvky jsou maximální, 3 prvky jsou minimální a každý maximální prvek je větší než libovolný minimální.
5. (10 bodů) Buď n přirozené číslo a dále $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Na množině $M = I \times I \cup \{0\}$ definujeme binární operaci \circ vztahy

$$x \circ 0 = 0 \circ x = 0 \quad \text{pro libovolné } x \in M;$$

$$(i, j) \circ (k, l) = \begin{cases} (i, l), & j \leq k \\ 0, & j > k \end{cases} \quad \text{pro libovolné } i, j, k, l \in I.$$

Dokažte, že operace \circ je vždy asociativní.

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje pro operaci \circ neutrální prvek.

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je operace \circ komutativní.

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je (M, \circ) grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n -prvková množina, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Určete počet všech dvojic množin (A, B) , takových, že $A \subseteq M$, $B \subseteq M$ a $A \cap B$ má nejvýše dva prvky.

Kolik z nich je takových, že $A \cup B = M$?

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je definována binární relace ρ takto: $X \rho Y \iff$

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y) \wedge (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y \leq x).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Popište rozklad $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

(Pozn: \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.)

8. (10 bodů) Na množině \mathbb{N} definujeme binární relaci \preceq takto:

$$k \preceq m \iff (k \mid m \wedge (\exists a \in \mathbb{N})(m \mid k^a)), \quad \text{pro } k, m \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že \preceq je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny (\mathbb{N}, \preceq) .

Je (\mathbb{N}, \preceq) úplný svaz?

Je (\mathbb{N}, \preceq) svaz?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď $n \in \mathbb{N}$ a položme $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Na množině $\mathcal{P}(A)$ definujeme relaci \preceq takto: pro $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ je $X \preceq Y$ právě tehdy, když

$$\text{existuje injektivní zobrazení } f : X \rightarrow Y \text{ splňující } (\forall x \in X)(x \leq f(x)).$$

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \preceq)$.

Rozhodněte, zda $id_{\mathcal{P}(A)}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \preceq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Rozhodněte, zda $id_{\mathcal{P}(A)}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ do uspořádané množiny $(\mathcal{P}(A), \preceq)$.

Je $(\mathcal{P}(A), \preceq)$ úplný svaz?

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: \subseteq značí inkluzi.)