

1. (7krát  $\pm 1$  bod (správně 1 bod, chybně  $-1$ , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))  
 Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):
  - (a) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny  $A, B, C$  a zobrazení  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  platí:  $f$  je injektivní a  $g$  je surjektivní  $\implies g \circ f$  je bijekce.
  - (b) **ano** — **ne** Pro každé uspořádání  $R$  množiny  $\mathbb{N}$  existuje minimální nebo maximální prvek v uspořádané množině  $(\mathbb{N}, R)$ .
  - (c) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny  $A$  a  $B$  tvoří množina všech relací mezi množinami  $A$  a  $B$  s uspořádáním inkluzí, tj.  $(\mathcal{P}(A \times B), \subseteq)$ , svaz.
  - (d) **ano** — **ne** Okruh  $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$  zbytkových tříd modulo 4 je těleso.
  - (e) **ano** — **ne** Pro libovolnou relaci  $R$  na množině  $A$  je  $R \circ R$  tranzitivní relace.
  - (f) **ano** — **ne** Množina všech injektivních zobrazení množiny  $\mathbb{N}$  do sebe tvoří spolu s operací skládání zobrazení grupu.
  - (g) **ano** — **ne** Množina všech konečných podmnožin množiny  $\mathbb{N}$  je spočetná.
2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině  $A$ . Definujte pojmy binární relace a relace ekvivalence na množině  $A$ . Definujte všechny užité pojmy. Které relace jsou zároveň relace ekvivalence a uspořádání?
3. (3krát 2 body) Kolik přirozených čísel mezi 1 a 300 je
  - (a) dělitelných 2, 3, ale není dělitelných 5;
  - (b) s ciferným součtem 18;
  - (c) zapsaných pouze pomocí sudých číslic.
4. (5krát 2 body) Udejte příklad
  - (a) svazu, který není úplný svaz;
  - (b) nekonečné, nespočetné grupy;
  - (c) 3-prvkového okruhu;
  - (d) neprázdné relace  $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  a neprázdné relace  $\sigma \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$  takových, že složená relace  $\sigma \circ \rho$  je prázdnou relací.
  - (e) uspořádané množiny, kde každý maximální prvek je zároveň minimální a existuje prvek, který je minimální, ale není maximální.
5. (10 bodů) V monoidu  $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$  označme  $\mathbb{Z}_9^*$  množinu všech prvků, ke kterým existuje inverzní prvek. Určete, kolik má množina  $\mathbb{Z}_9^*$  prvků, a vypište je.  
 Určete nějaké  $k \in \mathbb{Z}$  tak, že  $\varphi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_9$  dané předpisem  $\varphi([a]_6) = [k]_9^a$  je homomorfismus z grupy  $(\mathbb{Z}_6, +)$  do grupy  $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$  (tj. pro toto  $k$  ukažte, že předpis korektně definuje zobrazení  $\varphi$  a že  $\varphi$  je homomorfismus).  
 Určete nějaké  $k \in \mathbb{Z}$  tak, že  $\varphi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_9$  dané předpisem  $\varphi([a]_6) = [k]_9^a$  je izomorfismus z grupy  $(\mathbb{Z}_6, +)$  do grupy  $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ .  
 Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A = \{1, 2, \dots, n+2\}$  a  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ . Určete počet všech surjektivních zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ .

Kolik z nich je navíc izotonními zobrazeními z  $(A, \leq)$  do  $(B, \leq)$ , kde  $\leq$  je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Označme  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  a dále nechť  $M$  je množina všech neprázdných podmnožin množiny  $A$ . Na množině  $M$  je definována binární relace  $\rho$  vztahem

$$X\rho Y \iff \min X = \min Y.$$

Dokažte, že  $\rho$  je relace ekvivalence na množině  $M$ .

Popište rozklad  $M/\rho$ .

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

Pro  $n = 6$  vypište explicitně některou třídu rozkladu obsahující nějakou dvouprvkovou podmnožinu množiny  $A$ .

(Pozn:  $\min X$  značí minimální prvek množiny  $X$  (uspořádané podle velikosti).)

8. (10 bodů) Na množině  $M = \mathbb{Q} \cup \{\perp, \top\}$  definujeme binární relaci  $\preceq$  takto:

$$p \preceq q \iff (p = \perp \vee q = \top \vee (p, q \in \mathbb{Q} \wedge p \leq q \wedge \lfloor p \rfloor = \lfloor q \rfloor)) \quad \text{pro } p, q \in M.$$

Dokažte, že  $\preceq$  je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny  $(M, \preceq)$ .

Je  $(M, \preceq)$  svaz?

Popište, čemu se rovná  $\sup\{p, q\}$ .

Je  $(M, \preceq)$  úplný svaz?

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn:  $\leq$  je uspořádání racionálních čísel podle velikosti,  $\lfloor p \rfloor$  značí celou část čísla  $p$ .)

9. (10 bodů) Na množině  $M = \{(a, X) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid a \in X\}$  definujeme binární relaci  $\preceq$  takto:

$$(a, X) \preceq (b, Y) \iff (a \leq b \wedge X \subseteq Y).$$

Označme dále  $M^\perp = M \cup \{\perp\}$ , kde uspořádání  $\preceq$  pro prvek  $\perp$  dodefinujeme takto:

$$(\forall x \in M^\perp)(\perp \preceq x).$$

Je  $(M, \preceq)$  svaz?

Je  $(M^\perp, \preceq)$  svaz?

Je  $(M^\perp, \preceq)$  úplný svaz?

Popište, jak se počítají konečná suprema v  $(M, \preceq)$ .

Popište, jak se počítají libovolná infima v  $(M^\perp, \preceq)$ .

Odpovědi zdůvodněte.