Základy matematiky — podzim 2006 — 2. termín — 12.1.2007

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: f je injektivní a g je surjektivní $\implies$ $g \circ f$ je bijekce.

(b) **ano — ne** Pro každé uspořádání R množiny $\mathbb{N}$ existuje minimální nebo maximální prvek v uspořádané množině $(\mathbb{N}, R)$.

(c) **ano — ne** Pro libovolné množiny A a B tvoří množina všech relací mezi množinami A a B s uspořádáním inkluzí, tj. $(\mathcal{P}(A \times B), \subseteq)$, svaz.

(d) **ano — ne** Okruh $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 4 je těleso.

(e) **ano — ne** Pro libovolnou relaci R na množině A je $R \circ R$ tranzitivní relace.

(f) **ano — ne** Množina všech injektivních zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do sebe tvoří spolu s operací skládání zobrazení grupu.

(g) **ano — ne** Množina všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$ je spočetná.

2. (7 bodů) Definujte pojem uspořádání na množině A. Definujte pojmy binární relace a relace ekvivalence na množině A. Definujte všechny užité pojmy. Které relace jsou zároveň relace ekvivalence a uspořádání?

3. (3krát 2 body) Kolik přirozených čísel mezi 1 a 300 je

(a) dělitelných 2, 3, ale není dělitelných 5;

(b) s ciferným součtem 18;

(c) zapsaných pouze pomocí sudých číslic.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) svazu, který není úplný svaz;

(b) nekonečné, nespočetné grupy;

(c) 3-prvkového okruhu;

(d) neprázdné relace $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ a neprázdné relace $\sigma \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ takových, že složená relace $\sigma \circ \rho$ je prázdnou relací.

(e) uspořádané množiny, kde každý maximální prvek je zároveň minimální a existuje prvek, který je minimální, ale není maximální.

5. (10 bodů) V monoidu $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ označme $\mathbb{Z}_9^*$ množinu všech prvků, ke kterým existuje inverzní prvek. Určete, kolik má množina $\mathbb{Z}_9^*$ prvků, a vypište je.

Určete nějaké $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9$ dané předpisem $\varphi([a]_6) = [k]_9^a$ je homomorfismus z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ (tj. pro toto k ukažte, že předpis korektně definuje zobrazení φ a že φ je homomorfismus).

Určete nějaké $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9$ dané předpisem $\varphi([a]_6) = [k]_9^a$ je izomorfismus z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, \ldots, n+2\}$ a $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Určete počet všech surjektivních zobrazení z množiny A do množiny B.

Kolik z nich je navíc izotonními zobrazeními z $(A, \leq)$ do $(B, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ a dále nechť M je množina všech neprázdných podmnožin množiny A. Na množině M je definována binární relace ρ vztahem

$$X \rho Y \iff minX = minY.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M.

Popište rozklad $M \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

Pro $n = 6$ vypište explicitně některou třídu rozkladu obsahující nějakou dvouprvkovou podmnožinu množiny A.

(Pozn: $minX$ značí minimální prvek množiny X (uspořádané podle velikosti).)

8. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q} \cup \{\perp, \top\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$p \preceq q \iff (\, p = \perp \;\vee\; q = \top \;\vee\; (p, q \in \mathbb{Q} \wedge p \leq q \wedge \lfloor p \rfloor = \lfloor q \rfloor)\,) \quad \text{pro } p, q \in M.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$.

Je $(M, \preceq)$ svaz?

Popište, čemu se rovná $\sup\{p, q\}$.

Je $(M, \preceq)$ úplný svaz?

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání racionálních čísel podle velikosti, $\lfloor p \rfloor$ značí celou část čísla p.)

9. (10 bodů) Na množině $M = \{(a, X) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid a \in X\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$(a, X) \preceq (b, Y) \iff (a \leq b \wedge X \subseteq Y).$$

Označme dále $M^{\perp} = M \cup \{\perp\}$, kde uspořádání $\preceq$ pro prvek $\perp$ dodefinujeme takto:

$$(\forall x \in M^{\perp})(\perp \preceq x).$$

Je $(M, \preceq)$ svaz?

Je $(M^{\perp}, \preceq)$ svaz?

Je $(M^{\perp}, \preceq)$ úplný svaz?

Popište, jak se počítají konečná suprema v $(M, \preceq)$.

Popište, jak se počítají libovolná infima v $(M^{\perp}, \preceq)$.

Odpovědi zdůvodněte.