

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

- (a) **ano** — **ne** Existuje množina A taková, že existuje bijekce z množiny A do množiny $\mathcal{P}(A)$.
- (b) **ano** — **ne** Pro libovolnou bijekci $f : A \rightarrow B$ existuje zobrazení $g : B \rightarrow A$ takové, že $g \circ f = id_A$.
- (c) **ano** — **ne** Každá uspořádaná množina obsahuje pouze konečně mnoho maximálních prvků.
- (d) **ano** — **ne** Je-li $f : A \rightarrow B$ izomorfismus uspořádaných množin (A, \leq) a (B, \leq) , pak platí: pokud (A, \leq) je úplný svaz, pak (B, \leq) je úplný svaz.
- (e) **ano** — **ne** Množina \mathbb{R} je podgrupa grupy $(\mathbb{C}, +)$.
- (f) **ano** — **ne** Prázdná relace, tj. \emptyset , je symetrická relace na libovolné množině.
- (g) **ano** — **ne** Množina všech relací na množině \mathbb{N} , která jsou zobrazení, uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz.

2. (7 bodů) Definujte pojmy grupa, komutativní grupa a izomorfismus grup. Definujte všechny užití pojmy.

3. (3krát 2 body) Ve skladě je 20 výrobků, z toho je 5 zmetků. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat 7 předmětů tak, aby

- (a) byly všechny dobré;
- (b) byl mezi nimi nejvýše jeden zmetek;
- (c) mezi nimi bylo všech 5 zmetků.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

- (a) svazu, který nemá nejmenší prvek;
- (b) nekonečného, nespočetného úplného svazu;
- (c) 4-prvkové grupy;
- (d) relace na množině \mathbb{N} , která je relace ekvivalence a přitom není relace ekvivalence na množině \mathbb{Z} ;
- (e) uspořádání na množině \mathbb{Z} , kde je nekonečně mnoho maximálních prvků a nekonečně mnoho minimálních prvků a kde každý maximální prvek je větší než libovolný minimální.

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ definujeme binární operaci \circ vztahem

$$(a, [b]_2) \circ (c, [d]_2) = (a + (-1)^b c, [b + d]_2), \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že předpis korektně definuje operaci.

Rozhodněte, zda je operace \circ asociativní.

Rozhodněte, zda v (M, \circ) existuje neutrální prvek.

Je (M, \circ) grupa?

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$ a \leq je uspořádání přirozených čísel podle velikosti. Určete počet všech izotonních zobrazení z (A, \leq) do (B, \leq) .

Určete počet všech izotonních zobrazení z (B, \leq) do (A, \leq) .

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Na množině \mathbb{N} je definována binární relace ρ vztahem

$$x\rho y \iff (\exists m, n \in \mathbb{N})(x \mid y^m \wedge y \mid x^n).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině \mathbb{N} .

Popište rozklad $\mathbb{N} \setminus \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině \mathbb{N} definujeme binární relaci \preceq takto:

$$k \preceq m \iff (k \mid m \wedge k + 1 \mid m + 1), \quad \text{pro } k, m \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že \preceq je uspořádání.

Je 7 minimální prvek? Existuje nějaký minimální prvek?

Je 7 maximální prvek? Existuje nějaký maximální prvek?

Je (\mathbb{N}, \preceq) svaz?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Na množině $M = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \cap Y \neq \emptyset\}$ definujeme binární relaci \preceq takto:

$$(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subseteq X' \wedge Y \subseteq Y').$$

Je (M, \preceq) úplný svaz?

Dejte příklad injektivního zobrazení $\varphi : (M, \preceq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, které je izotonní.

Dejte příklad injektivního zobrazení $\varphi : (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq) \rightarrow (M, \preceq)$, které je izotonní.

Odpovědi zdůvodněte.