Písemka ze Cvičení z Algebry I, 15.12.2006

1. Polynom $f = x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$ rozložte na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_2[x]$. [10]

2. Nalezněte nejprve racionální [2] a poté násobné [2] kořeny polynomu $g = 4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x]$. Rozložte jej na součin ireducibilních polynomů s koeficienty postupně z těles $\mathbb{Q}$ [2], $\mathbb{R}$ [2], $\mathbb{C}$ [2].

3. Mějme $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   a) Rozhodněte, zda tato množina s operací klasického součinu matic tvoří grupu. [2]
   b) Určete, zda zobrazení $\alpha : (M, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ [2] a $\beta : (M, \cdot) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ [2] daná předpisy
   $$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \ln(a) \quad \text{a} \quad \beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2^a$$
   jsou homomorfismy. Je-li některé homomorfismem, rozhodněte dále, zda se jedná o izomorfismus [2], a určete jeho jádro [1] a obraz [1].

4. Jsou dány permutace s, $t \in \mathbb{S}_{10}$:
   $$s = (1, 9, 5, 4, 2, 8) \circ (2, 3, 8) \circ (1, 4, 9),$$
   $$t = (3, 6, 9, 5, 4) \circ (1, 7, 8, 2) \circ (1, 2, 8, 6) \circ (3, 4, 9).$$
   a) Určete řád permutací s [1] a t [1].
   b) Spočtěte s^{-1} [1], t^{-1} [1] a $s^{15} \circ t^{12} \circ s^{2006}$ [1].
   c) Určete podgrupu $H < \mathbb{S}_{10}$ [3] generovanou prvky s a t (neboli $H = \langle\{s, t\}\rangle$) a popište všechny její podgrupy [3].
   d) Rozhodněte, zda je H normální podgrupou $\mathbb{S}_{10}$. [2]
   e) Je H komutativní? [2]

5. Zjistěte, ve které rozkladové třídě $\mathbb{Z}_{17}$ leží číslo $5^{5^5} + 11^{11^{11}}$ [5], a určete inverzní prvek k této třídě v $(\mathbb{Z}_{17}, \cdot)$ [5].