OPRAVNÁ PÍSEMNÁ PRÁCE — A — 19. prosince 2006

1. Sportovní střelec zasáhne cíl při každém výstřelu s pravděpodobností $p = 0.8$. Vypočtěte pravděpodobnost, že při 5 výstřelech budou v terči alespoň dva zásahy.

2. V osudí je 5 černých koulí a 5 bílých koulí. Vybereme bez vracení 6 koulí. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dvě z oněch vybraných koulí budou bílé?

3. Je dán šestiúhelník $ABCDEF$, kde $A = [1, -10]$, $B = [10, -3]$, $C = [4, 9]$, $D = [-2, 14]$, $E = [-6, 8]$ a $F = [-9, 2]$. Vypočítejte, zda z bodu $X = [-12, -2]$ vidíte hrany AF, EF a DE.

4. Určete vlastnosti relace na množině $\mathbb{N}$ dané předpisem

$$x,\ y \in \mathbb{N},\ x \sim y \iff |x| < |y|,$$

tj. zda je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, zda je to relace ekvivalence či uspořádání. Tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad.

5. Řešte následující rovnici

$$\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + \ \ 7x_3 + 10x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - \ \ 3x_3 - \ \ 4x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 &= 1. \end{aligned}$$

6. Řešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Určete matici přechodu od base α k basi β, kde

$$\alpha = \{(-1,\ 1,\ 0)^T,\ (1,\ 1,\ 0)^T,\ (0,\ 0,\ 1)^T\} \quad \text{a} \quad \beta = \{(1,\ 0,\ 0)^T,\ (1,\ 1,\ 0)^T,\ (1,\ 1,\ 1)^T\}.$$

Určete také souřadnice vektoru $[x]_\beta$, je-li $[x]_\alpha = (2,\ 4,\ 7)^T$.

8. Určete ortonormální basi podprostoru

$$W = \mathrm{Span} < (0,\ 2,\ 1,\ 0)^T,\ (1,\ -1,\ 0,\ 0)^T,\ (1,\ 2,\ 0,\ -1)^T > .$$

Zachovejte pořadí vektorů.

9. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Každý příklad je hodnocen dvěma body — hodnocen není jen správný výsledek, ale především postup.
K získání zápočtu musíte získat alespoň polovinu bodů, tj. 9.

OPRAVNÁ PÍSEMNÁ PRÁCE — B — 19. prosince 2006

1. Soustruh vyrobí každou minutu jednu součástku, přičemž pravděpodobnost, že součástka má vadu, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že soustruh vyrobí za hodinu nejvýše 4 vadné součástky?

2. Jsou dána tři osudí. V prvním osudí jsou 3 bílé a 5 černých koulí, ve druhém osudí jsou 4 bílé a 2 černé koule a ve třetím osudí je 7 bílých koulí. Z náhodně vybraného osudí vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

3. Jsou dány body $A = [-1, 4]$, $B = [-2, -1]$, $C = [-1, -5]$, $D = [3, 2]$ a $E = [8, 6]$. Vypočítejte obsah pětiúhelníku $ABCDE$.

4. Určete vlastnosti relace na množině $\mathbb{R}$ dané předpisem

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ x \sim y \iff |x - y| \leq 1,$$

tj. zda je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, zda je to relace ekvivalence či uspořádání. Tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad.

5. Řešte následující rovnici

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3, \\ 9x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 &= 9. \end{aligned}$$

6. Řešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Určete matici přechodu od base α k basi β, kde

$$\alpha = \{(0,\ 1,\ 2)^T,\ (2,\ 1,\ -3)^T,\ (-1,\ 2,\ 3)^T\} \quad \text{a} \quad \beta = \{(-3,\ -1,\ -4)^T,\ (-4,\ -1,\ -7)^T,\ (-4,\ -1,\ -6)^T\}.$$

Určete také souřadnice vektoru $[x]_\beta$, je-li $[x]_\alpha = (4,\ 3,\ 1)^T$.

8. Určete ortonormální basi podprostoru

$$W = \text{Span} < (1,\ 1,\ -1,\ -1)^T,\ (1,\ -1,\ 1,\ 1)^T,\ (-1,\ -2,\ 0,\ 1)^T > .$$

Zachovejte pořadí vektorů.

9. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Každý příklad je hodnocen dvěma body — hodnocen není jen správný výsledek, ale především postup. K získání zápočtu musíte získat alespoň polovinu bodů, tj. 9.