Čtvrtý zápočtový test – A

Příklad 1 (1 bod). Rozhodněte, zda je matice

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonální. Svou odpověď *musíte* zdůvodnit.

Řešení. Matice Q je ortogonální. Součinem matic Q a Q^T je totiž matice jednotková, tj. je

$$Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 2 (2 body). Jestliže lineární transformaci $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ reprezentuje v nějaké bázi označené jako α matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

a lineární zobrazení $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ zadává v bázi α prostoru $\mathbb{R}^3$ a bázi β prostoru $\mathbb{R}^5$ matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

určete matici reprezentující lineární zobrazení $G \circ F$ v bázích α a β.

Řešení. Výsledek je (viz cvičení)

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 & -9 \\ 13 & -5 & -4 \\ 12 & 5 & -23 \\ 12 & 5 & -23 \\ 12 & 5 & -23 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3 (3 body). Nalezněte Ker L a Im L lineárního zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ zadaného vztahem

$$L((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Řešení. Výsledek je

$$\text{Ker } L = \{a \cdot (1, 1, -2);\ a \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{Im } L = \{b \cdot (1, 2, 0) + c \cdot (3, 4, 2);\ b, c \in \mathbb{R}\}.$$

□

Příklad 4 (1 bod). Kdy jsou dvě čtvercové matice A a B stejného řádu (téhož rozměru) podobné? Uveďte definici nebo nějakou nutnou a současně postačující podmínku.

Řešení. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 97. □

Příklad 5 (2 body). Vypočítejte (či jinak určete) ortogonální doplněk (komplement) podprostoru U prostoru $\mathbb{R}^4$, jestliže je nadrovina U generována vektory

$$(1, -8, 0, 1), \quad (11, 3, 0, 1), \quad (4, 0, 0, -1), \quad (0, 5, 0, 6), \quad (-11, -3, 0, 1).$$

Řešení. Zřejmě je

$$U^\perp = \text{Span } \langle (0, 0, 1, 0) \rangle = \{k \cdot (0, 0, 1, 0);\ k \in \mathbb{R}\}.$$

□

Příklad 6 (2 body). Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Zvolme n různých bodů $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom v prostoru $\mathcal{P}_n$ reálných polynomů stupně nejvýše n pro libovolné funkce $p, q \in \mathcal{P}_n$ položme

$$\langle\, p, q \,\rangle := \sum_{k=1}^{n} p(x_k) \cdot q(x_k).$$

Dokažte, nebo vyvraťte, že se jedná o skalární součin. Pokud se jedná o skalární součin, určete vzdálenost vektorů 1 a -1 v $\mathcal{P}_n$.

Řešení. Nejedná se o skalární součin. Stačí uvážit polynom

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

který je stupně n, je nenulový, ale jeho norma indukovaná daným skalárním součinem by pak musela být nulová, což nelze.

Uvědomte si, že ve skriptu doc. Hilschera na str. 107 bylo zvoleno $n+1$ různých reálných čísel, nikoli pouze n. □

Příklad 7 (3 body). V trojrozměrném reálném prostoru se standardním skalárním součinem určete odchylku (směrového vektoru) přímky zadané rovnicemi

$$x + y + 3z = 0,$$

$$x - y - z = 0$$

od roviny

$$2x + y + z = 0$$

metodou nejmenším čtverců (jiný způsob výpočtu nebude uznán).

Uvědomte si, že byste mohli začít výpočtem ortogonálních doplňků.

Řešení. Výsledek je

$$\frac{\pi}{6}.$$

□

Příklad 8 (1 bod). Napište nějakou ortonormální bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ s tzv. Frobeniovou normou. (Norma v tomto případě (viz cvičení) zpětně určuje skalární součin – tím i pojem kolmosti vektorů.)

Řešení. Hledaná ortonormální báze může být např. tvořena maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□